

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Механика деформируемого твердого тела.
(теория пластичности)**

материалы к лекциям для студентов 4-го курса ММФ (2-й поток)
лектор: профессор Ю.М. Волчков

НОВОСИБИРСК

2011

Введение

В предлагаемом варианте электронного пособия содержится материал, который излагался на лекциях в 7-м семестре для студентов 2-го потока четвертого курса ММФ в 2011 году..

Программа курса "Теория пластичности" (4-й курс, 7-й семестр, 2-й поток, 2011 г.)

I. Основные сведения из теории упругости.

1. Деформация среды. Лагранжев и эйлеров способы описания движения среды. Изменение длины линейного элемента. Изменение направления линейного элемента. Сдвиги. Тензор деформаций. Преобразование величин e_{ij} и ω_k при переходе от одной системы координат к другой и их геометрический смысл. Картина деформации окрестности произвольной точки. Относительное изменение объёма. Упрощения при малых удлинениях и сдвигах. Упрощения, когда малы не только деформации но и углы поворота. Уравнения совместности деформаций.

2. Напряжения в сплошной среде. Общие свойства поля напряжений. Напряженное состояние в точке. Диаграмма Мора. Теорема взаимности. Геометрическая интерпретация напряженного состояния в точке. Девиатор напряжений. Девиаторная плоскость.

3. Определяющие соотношения. Закон Гука для трехмерного напряженно-деформированного состояния. Закон Гука для изотропного материала.

4. Основные уравнения линейной теории упругости. Постановка краевых задач в линейной теории упругости. Уравнения теории упругости в перемещениях (уравнения Ламе). Уравнения теории упругости в напряжениях (уравнения Бельтрами). Вариационный принцип Лагранжа. Вариационный принцип Кастильяно.

II. Основы теории пластичности.

Диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$ одноосного растяжения. Простое и сложное нагружения. Упрочнение и разупрочнение. Поверхность нагружения. Функция нагружения.

Разгрузка, нейтральное нагружение и нагружение.

Принцип максимума. Ассоциированный закон деформирования. Эквивалентность принципа максимума и ассоциированного закона деформирования. Поверхности текучести для изотропного материала. Условие текучести Треска — Сен-Венана. Условие текучести Мизеса.

Теория пластического течения для изотропного материала. Состояние текучести. Уравнения Прандтля — Рейса. Теория пластичности Сен-Венана — Мизеса. Состояние упрочнения.

Модель жесткопластического тела. Пространство напряжений. Допустимые напряжения. Поверхность текучести. Поверхность текучести Треска. Поверхность текучести Мизеса. Основные свойства поверхностей текучести Треска и Мизеса. Принцип максимума. Принцип максимума и нормальный (ассоциированный) закон течения. Постановка задач теории жесткопластического тела. Предельное равновесие жесткопластического тела. Стационарные задачи о пластическом формоизменении. Нестационарные задачи о пластическом формоизменении. Единственность распределения напряжений в пластических областях. Полное решение задачи идеальной пластичности.

Предельные нагрузки. Предельные нагрузки стержневой системы. Теорема о нижней оценке несущей способности. Теорема о верхней оценке несущей способности.

Плоская задача идеального жесткопластического тела. Постановка задачи. Уравнения для определения поля напряжений. Уравнения для определения поля скоростей. Условия пластичности Мизеса и Треска — Сен-Венана в случае плоской деформации. Основные свойства характеристических линий. Сведение уравнений плоской задачи к телеграфному уравнению. Численное решение задачи Коши для поля напряжений. Простые решения. Задача Прандтля о вдавливании штампа в полупространство.

Полуобратный метод Сен-Венана. Задача о кручении стержней. Гипотезы Сен-Венана. Основные уравнения задачи о кручении стержней. Упругое кручение стержня. Мембранная аналогия. Пластическое кручение стержня. Поверхность пластических напряжений. Эквидистантные кривые и поверхности постоянного ската. Предельное состояние и предельный скручивающий момент.

Использованная при чтении курса литература приведена в конце пособия.

Оглавление

Введение	2
1 Основные сведения из теории упругости	7
1.1 Деформация среды	7
1.1.1 Лагранжев и эйлеров способы описания движения среды	7
1.1.2 Изменение длины линейного элемента	7
1.1.3 Изменение направления линейного элемента	10
1.1.4 Сдвиги	11
1.1.5 Тензор деформаций	12
1.1.6 Преобразование величин e_{ij} и ω_k при переходе от одной системы координат к другой и их геометрический смысл	13
1.1.7 Картина деформации окрестности произвольной точки	15
1.1.8 Относительное изменение объёма	16
1.1.9 Упрощения при малых удлинениях и сдвигах	16
1.1.10 Упрощения, когда малы не только деформации, но и углы поворота	17
1.1.11 Уравнения совместности деформаций	19
1.2 Напряжения в сплошной среде	21
1.2.1 Общие свойства поля напряжений	21
1.2.2 Напряженное состояние в точке	29
1.3 Диаграмма Мора	31
1.3.1 Теорема взаимности	34
1.3.2 Геометрическая интерпретация напряженного состояния в точке	35
1.4 Упругое тело	43
1.4.1 Закон Гука	43
1.4.2 Упругое тело и упругие потенциалы	44

1.4.3	Закон Гука для трехмерного напряженно-деформированного состояния.	46
1.4.4	Закон Гука для изотропного материала	49
1.4.5	Постановка краевых задач в линейной теории упругости.	50
1.5	Вариационные принципы в линейной теории упругости	53
1.5.1	Вариационный принцип Лагранжа	53
1.5.2	Вариационный принцип Кастильяно	54
2	Основы теории пластичности	57
2.1	Диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$ одноосного растяжения	57
2.2	Упрочнение и разупрочнение. Поверхность нагружения	62
2.3	Принцип максимума. Ассоциированный закон деформирования	66
2.4	Поверхности текучести для изотропного материала	68
2.4.1	Условие текучести Треска — Сен-Венана.	70
2.4.2	Условие текучести Мизеса.	71
2.5	Теория пластического течения для изотропного материала	72
2.5.1	Состояние текучести.	73
2.5.2	Состояние упрочнения	73
3	Модель жесткопластического тела	75
3.1	Пространство напряжений	76
3.1.1	Допустимые напряжения	76
3.1.2	Поверхность текучести	77
3.1.3	Принцип максимума	79
3.2	Постановка задач теории жесткопластического тела	81
3.2.1	Предельное равновесие жесткопластического тела.	81
3.2.2	Стационарные задачи о пластическом формоизменении.	82
3.2.3	Нестационарные задачи о пластическом формоизменении.	82
3.2.4	Единственность распределения напряжений в пластических областях.	83
3.2.5	Полное решение задачи идеальной пластичности.	84
3.3	Предельные нагрузки	84
3.3.1	Предельные нагрузки стержневой системы.	85
3.4	Экстремальные свойства предельных состояний текучести	88
3.4.1	Теорема о нижней оценке несущей способности	88
3.4.2	Теорема о верхней оценке несущей способности	91

3.5	Плоская задача идеального жесткопластического тела.	92
3.5.1	Постановка задачи.	92
3.5.2	Уравнения для определения поля напряжений.	93
3.5.3	Уравнения для определения поля скоростей.	96
3.5.4	Условия пластичности Мизеса и Треска — Сен-Венана в случае плоской деформации.	97
3.5.5	Численное решение задачи Коши для поля напряжений.	101
3.5.6	Простые решения. Задача Прандтля	102
3.6	Полуобратный метод Сен-Венана	105
3.6.1	Задача о кручении стержней.	105
3.6.2	Основные уравнения.	107
3.6.3	Упругое кручение стержня.	109
3.6.4	Пластическое кручение стержня.	109

Глава 1

Основные сведения из теории упругости

1.1 Деформация среды.

1.1.1 Лагранжев и эйлеров способы описания движения среды.

Пусть x, y, z — координаты в декартовой системе координат некоторой точки среды в начальном (недеформированном) состоянии, ξ, η, ζ — координаты той же точки в деформированном состоянии относительно той же системы координат. Координаты x, y, z и ξ, η, ζ связаны соотношениями

$$\xi = x + u(x, y, z; t), \quad \eta = y + v(x, y, z; t), \quad \zeta = z + w(x, y, z; t) \quad (1.1)$$

где u, v, w , — компоненты вектора перемещения. Функции u, v, w , будем считать непрерывными вместе с ее частными производными производными.

Компоненты перемещения u, v, w , можно рассматривать как функции ξ, η, ζ . Тогда будем иметь

$$x = \xi - u(\xi, \eta, \zeta; t), \quad y = \eta - v(\xi, \eta, \zeta; t), \quad z = \zeta - w(\xi, \eta, \zeta; t) \quad (1.2)$$

Координаты x, y, z называются лагранжевскими, координаты ξ, η, ζ — эйлеровскими.

В теории упругости обычно используется лагранжев способ описания движения среды, поскольку уравнения одной и той же материальной поверхности в переменных Лагранжа в недеформированном и деформированном состоянии одни и те же.

1.1.2 Изменение длины линейного элемента.

Посмотрим, что происходит в результате деформации с окрестностью точки M которая в недеформированном состоянии имеет координаты x, y, z (рис. 1.1).

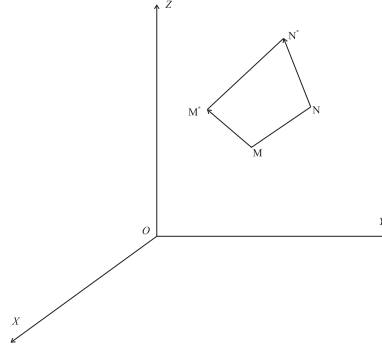


Рис. 1.1: Изменение длины линейного элемента

Рассмотрим бесконечно близкую к не точку N с координатами $x + dx, y + dy, z + dz$. Точка M с координатами x, y, z перейдет согласно (1.1) в точку M^* с координатами ξ, η, ζ , точка N с координатами $x + dx, y + dy, z + dz$ — в точку N^* с координатами $\xi + d\xi, \eta + d\eta, \zeta + d\zeta$, где

$$\begin{aligned} d\xi &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz, \\ d\eta &= \frac{\partial v}{\partial x}dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz, \\ d\zeta &= \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dz. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Длина линейного элемента в недеформированном состоянии равна

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (1.4)$$

а в деформированном состоянии —

$$(ds^*)^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2. \quad (1.5)$$

Составим квадратичную форму

$$(ds^*)^2 - ds^2 = 2(\varepsilon_{xx}dx^2 + \varepsilon_{yy}dy^2 + \varepsilon_{zz}dz^2 + 2\varepsilon_{xz}dxdz + 2\varepsilon_{xy}dxdy + 2\varepsilon_{yz}dydz), \quad (1.6)$$

где в силу (1.3)

$$\varepsilon_{xx} = \gamma_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right],$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yy} = \gamma_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u^2}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v^2}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w^2}{\partial y} \right) \right], \\ \varepsilon_{zz} = \gamma_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u^2}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial v^2}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial w^2}{\partial z} \right) \right], \\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 2\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = 2\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 2\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}$$

Обозначим через E_{MN} относительное удлинение волокна MN

$$E_{MN} = \frac{ds_* - ds}{ds} \quad (1.7)$$

Выразим в (1.6) ds_* через ds и E_{MN} . В результате получим

$$E_{MN}(1 + \frac{1}{2}E_{MN})ds^2 = \varepsilon_{xx}dx^2 + \varepsilon_{yy}dy^2 + \varepsilon_{zz}dz^2 + \varepsilon_{xz}dxdz + \varepsilon_{xy}dxdy + \varepsilon_{yz}dydz, \quad (1.8)$$

или

$$E_{MN}(1 + \frac{1}{2}E_{MN}) = \varepsilon_{xx}\lambda^2 + \varepsilon_{yy}\mu^2 + \varepsilon_{zz}\nu^2 + \varepsilon_{xz}\lambda\nu + \varepsilon_{xy}\lambda\mu + \varepsilon_{yz}\mu\nu, \quad (1.9)$$

где $\lambda = dx/ds$, $\mu = dy/ds$, $\nu = dz/ds$ — направляющие косинусы вектора \vec{MN} .

Из (1.10), положив $\lambda = 1$, $\mu = \nu = 0$ (элемент MN параллелен оси x), получим

$$E_x(1 + \frac{1}{2}E_x) = \varepsilon_{xx}, \quad (1.10)$$

или

$$E_x = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}} - 1. \quad (1.11)$$

Аналогично получим

$$E_y = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}} - 1, \quad E_z = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{zz}} - 1. \quad (1.12)$$

E_x, E_y, E_z — относительные удлинения волокон параллельных в начальном состоянии координатным осям X, Y, Z соответственно.

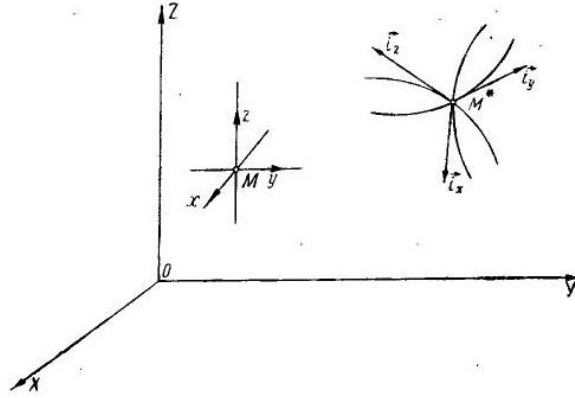


Рис. 1.2: Изменение направления линейного элемента

1.1.3 Изменение направления линейного элемента.

Вектор MN (рис. 1.1) образует с осями координат X, Y, Z углы, направляющие косинусы которых есть $\lambda = dx/ds, \mu = dy/ds, \nu = dz/ds$. Вектор M^*N^* образует с осями координат X, Y, Z углы, направляющие косинусы которых есть $\lambda^* = d\xi/ds^*, \mu^* = d\eta/ds^*, \nu^* = d\zeta/ds^*$. Заменив $d\xi, d\eta, d\zeta$ их значениями согласно (1.3), а ds^* через ds и E_{MN} согласно (1.8), получим

$$\begin{aligned}\lambda^* &= \frac{1}{1 + E_{MN}} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \lambda + \frac{\partial u}{\partial y} \mu + \frac{\partial u}{\partial z} \nu \right], \\ \mu^* &= \frac{1}{1 + E_{MN}} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \lambda + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \mu + \frac{\partial v}{\partial z} \nu \right], \\ \nu^* &= \frac{1}{1 + E_{MN}} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \lambda + \frac{\partial w}{\partial y} \mu + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \nu \right]\end{aligned}\quad (1.13)$$

Формулы (1.13) определяют направление произвольного волокна тела после деформации. В частности, если волокно до деформации было параллельно оси X , то

$$\lambda^* = \frac{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}{1 + E_x}, \quad \mu^* = \frac{1 + \frac{\partial v}{\partial x}}{1 + E_x}, \quad \nu^* = \frac{1 + \frac{\partial w}{\partial x}}{1 + E_x}\quad (1.14)$$

Здесь E_x — относительное удлинение волокна, параллельного до деформации оси X . Аналогичные формулы можно выписать для направляющих косинусов волокон, параллельных до деформации осям Y и Z .

Обозначим (рис. 1.2) единичные векторы, направленные по касательным к координатным линиям x, y, z в точке M^* через $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$.

Направляющие косинусы вектора \mathbf{i}_x определяются формулами (1.13). Направляющие косинусы векторов $\mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$ определяются аналогичными формулами.

1.1.4 Сдвиги.

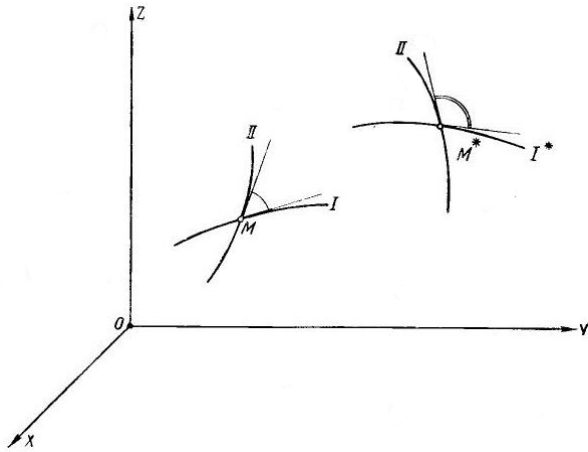


Рис. 1.3: Изменение угла между линейными элементами

Рассмотрим два произвольных волокна (I и II), проходящих до деформации через точку M (рис. 1.3). Пусть направляющие косинусы касательных к этим волокнам (в точке M) будут равны λ_I, μ_I, ν_I и $\lambda_{II}, \mu_{II}, \nu_{II}$ соответственно. После деформации направления касательных изменятся (рис. 1.3). Новые значения направляющих косинусов $\lambda_I^*, \mu_I^*, \nu_I^*$ и $\lambda_{II}^*, \mu_{II}^*, \nu_{II}^*$ можно вычислить с помощью формулы (1.13). Затем по формуле

$$\cos(I^*, II^*) = \lambda_I^* \lambda_{II}^* + \mu_I^* \mu_{II}^* + \nu_I^* \nu_{II}^*$$

можно найти косинус угла между волокнами после деформации.

Выпишем эти формулы в частном случае. Пусть касательные к волокнам I и II до деформации параллельны координатным осям X, Y соответственно. Тогда после деформации касательные к волокнам после деформации будут совпадать с направлениями единичных векторов \mathbf{i}_x и \mathbf{i}_y соответственно (рис. 1.2). Можно показать, что в этом случае

$$\cos(\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y) = \frac{\varepsilon_{xy}}{\sqrt{(1 + E_x)(1 + E_y)}} = \frac{\varepsilon_{xy}}{\sqrt{(1 + 2\varepsilon_{xx})(1 + 2\varepsilon_{yy})}}$$

В этом частном случае угол между волокнами I и II , равный углу между осями координат X и Y , был прямым. Обозначим уменьшение этого угла вследствие

деформации через φ_{xy} . Тогда

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{xy}\right) = \sin \varphi_{xy} = \frac{\varepsilon_{xy}}{\sqrt{(1 + 2\varepsilon_{xx})(1 + 2\varepsilon_{yy})}} \quad (1.15)$$

Аналогично можно ввести величины φ_{xz} и φ_{yz} — изменения первоначально прямых углов между волокнами, параллельными до деформации осям X и Z и осям Y и Z соответственно:

$$\sin \varphi_{xz} = \frac{\varepsilon_{xz}}{\sqrt{(1 + 2\varepsilon_{xx})(1 + 2\varepsilon_{zz})}}, \quad \sin \varphi_{yz} = \frac{\varepsilon_{yz}}{\sqrt{(1 + 2\varepsilon_{yy})(1 + 2\varepsilon_{zz})}} \quad (1.16)$$

Углы φ_{xy} , φ_{xz} , φ_{yz} называются сдвигами.

Если относительные удлинения малы $E_x \ll 1$, $E_y \ll 1$, $E_z \ll 1$ (следовательно, $\varepsilon_{xx} \ll 1$, $\varepsilon_{yy} \ll 1$, $\varepsilon_{zz} \ll 1$, и сдвиги малы $\sin \varphi_{xy} \simeq \varphi_{xy}$, $\sin \varphi_{xz} \simeq \varphi_{xz}$, $\sin \varphi_{yz} \simeq \varphi_{yz}$), то

$$\varphi_{xy} = \varepsilon_{xy}, \quad \varphi_{xz} = \varepsilon_{xz}, \quad \varphi_{yz} = \varepsilon_{yz} \quad (1.17)$$

1.1.5 Тензор деформаций.

Введем величины

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad e_{xz} = e_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad e_{yz} = e_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad (1.18)$$

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (1.19)$$

Разрешим соотношения (1.18) и (1.19) относительно частных производных от компонент вектора перемещений по координатам x, y, z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e_{xx}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2}e_{xy} - \omega_z, & \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{2}e_{xz} + \omega_y, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{2}e_{xy} + \omega_z, & \frac{\partial v}{\partial y} &= e_{yy}, & \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{2}e_{yz} - \omega_x, \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{2}e_{xz} - \omega_y, & \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{2}e_{yz} + \omega_x, & \frac{\partial w}{\partial z} &= e_{zz} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Выражения для коэффициентов квадратичной формы (1.6) теперь можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon_{xx} = e_{xx} + \frac{1}{2} \left[e_{xx}^2 + \left(\frac{1}{2}e_{xy} + \omega_z \right)^2 + \left(\frac{1}{2}e_{xz} - \omega_y \right)^2 \right] \quad (1.21)$$

$$2\varepsilon_{xy} = e_{xy} + e_{xy} \left(\frac{1}{2}e_{xy} - \omega_z \right) + e_{yy} \left(\frac{1}{2}e_{xy} + \omega_z \right) + \left(\frac{1}{2}e_{xz} - \omega_y \right) \left(\frac{1}{2}e_{yz} + \omega_x \right)$$

Выражения для $\varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}$ получаются из приведенных выше с помощью круговой замены $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$.

Матрица

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{zx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

определяет симметричный тензор второго ранга, который называется *тензором конечных деформаций*. Главные компоненты деформации являются корнями кубического уравнения

$$\varepsilon^3 - E_1\varepsilon^2 + E_2\varepsilon - E_3 = 0, \quad (1.23)$$

где

$$\begin{aligned} E_1 &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}, \\ E_2 &= \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \frac{1}{4}(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2), \\ E_3 &= \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} - \frac{1}{4}(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{xz}\varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{xy}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz}) \end{aligned} \quad (1.24)$$

1.1.6 Преобразование величин e_{ij} и ω_k при переходе от одной системы координат к другой и их геометрический смысл

Можно показать, что величины e_{ij} преобразуются при переходе от одной системы координат к другой по тому же закону, что и величины ε_{ij} . Следовательно, матрица

$$\begin{bmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2}e_{xy} & \frac{1}{2}e_{xz} \\ \frac{1}{2}e_{yx} & e_{yy} & \frac{1}{2}e_{yz} \\ \frac{1}{2}e_{zx} & \frac{1}{2}e_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

определяет симметричный тензор второго ранга.

Величины e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} имеют следующий геометрический смысл [1].

Величина e_{xx} есть относительное удлинение проекции на ось X линейного элемента, направление которого до деформации было параллельно этой оси. Аналогичный смысл имеют величины e_{yy} и e_{zz} .

Величины ω_k при переходе от одной системы координат к другой преобразуются как компоненты вектора $\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$.

Компоненты ω_k вектора $\vec{\omega}$ связаны с характеристиками, определяющими поворот, который в результате деформации получает бесконечно малый объемный элемент тела. Под поворотом понимается среднее значение всех поворотов множества линейных элементов, принадлежащих данному объёмному элементу.

Обозначим через $\overline{\tan \psi_z}, \overline{\tan \psi_x}, \overline{\tan \psi_y}$ средние значения тангенсов углов поворотов всех линейных элементов вокруг осей z, x, y соответственно.

Эти величины выражаются через e_{ij}, ω_k по следующим формулам [1]:

$$\begin{aligned}\overline{\tan \psi_x} &= \frac{\omega_x}{\sqrt{(1 + e_{yy})(1 + e_{zz}) - \frac{1}{4}e_{yz}^2}} \\ \overline{\tan \psi_y} &= \frac{\omega_y}{\sqrt{(1 + e_{xx})(1 + e_{zz}) - \frac{1}{4}e_{xz}^2}} \\ \overline{\tan \psi_z} &= \frac{\omega_z}{\sqrt{(1 + e_{xx})(1 + e_{yy}) - \frac{1}{4}e_{xy}^2}}\end{aligned}\tag{1.26}$$

Таким образом, параметры $\overline{\tan \psi_z}, \overline{\tan \psi_x}, \overline{\tan \psi_y}$, характеризующие поворот бесконечно малого объёма, окружающего точку M , пропорциональны величинам ω_k . Эти параметры равны нулю, если равны нулю компоненты вектора $\vec{\omega}$. Если эти компоненты равны нулю в некоторой системе координат X, Y, Z , то они будут равны нулю и в любой другой системе координат.

Таким образом, если в какой либо точке деформированного тела имеют место равенства

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0,\tag{1.27}$$

то все линейные элементы, проходящие через эту точку, не будут получать в среднем никакого поворота относительно любой проходящей через эту точку оси.

Таким образом, равенства (1.27) можно рассматривать как условия отсутствия поворота произвольного бесконечно малого объёмного элемента, окружающего рассматриваемую точку тела.

1.1.7 Картина деформации окрестности произвольной точки

Из формул (1.3) следует, что проекции векторов MN и $M'N'$ связаны линейными зависимостями. Входящие в (1.3) коэффициенты нужно считать постоянными, равными, например, их значениям в точке M . При линейном преобразовании

- прямые переходят в прямые;
- плоскости — в плоскости при сохранении их параллельности;
- поверхности второго порядка — в поверхности второго порядка, в частности, сфера переходит в эллипсоид.

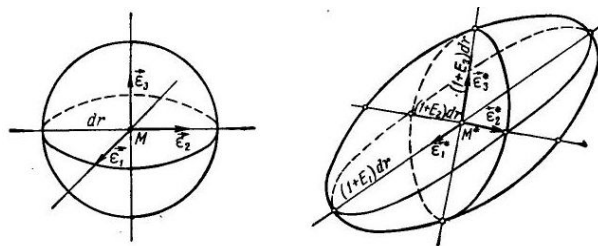


Рис. 1.4: Деформация в окрестности произвольной точки

Таким образом, всякий бесконечно малый параллелепипед превращается в результате деформации в другой параллелепипед (вообще говоря, с другими размерами ребер и углами между ребрами).

Бесконечно малая окрестность точки M в результате деформации получает

- поступательное перемещение, характеризуемое вектором \mathbf{u} ;
- поворот, в результате которого волокна, имевшие до деформации направления $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ совмещаются с $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$;

1.1.8 Относительное изменение объёма

Рассмотрим бесконечно малый объёмный элемент произвольной формы. Пусть до деформации объём этого элемента равен V . После деформации этот элемент переходит в элемент, объём которого равен V^* . Обозначим через Δ относительное изменение объёма:

$$\Delta = \frac{V^* - V}{V}.$$

Можно показать [1], что относительное изменение объёма вычисляется по формуле

$$\frac{V^* - V}{V} = \Delta = (1 + E_1)(1 + E_2)(1 + E_3) - 1, \quad (1.28)$$

где

$$E_i = \sqrt{1 + 2\varepsilon_i} - 1$$

— главные удлинения в той точке, где вычисляется приращение объёма.

1.1.9 Упрощения при малых удлинениях и сдвигах

Большинство материалов, в частности, многие металлы деформируются упруго при очень малых удлинениях волокон и сдвигах между ними. Будем считать, что удлинения и сдвиги малы по сравнению с единицей. Тогда, пренебрегая квадратами этих величин по сравнению с единицей, из формул (1.11), (1.12), и (1.15), (1.16) получим

$$\begin{aligned} E_x &\approx \varepsilon_{xx}, & E_y &\approx \varepsilon_{yy}, & E_z &\approx \varepsilon_{zz}, \\ \varphi_{xy} &\approx \varepsilon_{xy}, & \varphi_{xz} &\approx \varepsilon_{xz}, & \varphi_{yz} &\approx \varepsilon_{yz}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Таким образом при малых удлинениях и сдвигах компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ можно отождествить с соответствующими удлинениями, а компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ — с соответствующими углами сдвига.

Формула для относительного изменения объёма при малых удлинениях и сдвигах также упрощается:

$$\Delta \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \approx \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}. \quad (1.30)$$

Таким образом, при малых удлинениях и сдвигах инвариант деформации $E_1 = e$ может быть отождествлен с относительным изменением объёма.

1.1.10 Упрощения, когда малы не только деформации, но и углы поворота

Рассмотрим случай, когда малы по сравнению с единицей не только деформации ε_{ij} , но и углы поворотов. Можно показать [1], что в этом случае малыми по сравнению с единицей будут и все частные производные от компонент вектора перемещения. Тогда малыми будут и параметры e_{ij} и ω_k в (1.18) и (1.19), которые являются линейными комбинациями производных от компонент вектора перемещения. Поэтому формулы (1.26) можно упростить:

$$\begin{aligned}\overline{\tan \psi_x} &\approx \psi_x \approx \omega_x \\ \overline{\tan \psi_y} &\approx \psi_y \approx \omega_y \\ \overline{\tan \psi_z} &\approx \psi_z \approx \omega_z\end{aligned}\tag{1.31}$$

Таким образом, пренебрежение компонентами деформации и углами поворота по сравнению с единицей дает возможность отождествить параметры ω_j со средними поворотами элементарного объема вокруг осей X, Y, Z . А так как малые повороты суммируются как векторы, то можно сказать, что в данном случае объемный элемент поворачивается на угол $\boldsymbol{\omega}$ вокруг оси, направление которой определяется направляющими косинусами

$$\cos(\boldsymbol{\omega}, X) = \frac{\omega_x}{\omega}, \quad \cos(\boldsymbol{\omega}, Y) = \frac{\omega_y}{\omega}, \quad \cos(\boldsymbol{\omega}, Z) = \frac{\omega_z}{\omega}.$$

Выражения для компонент тензора деформаций можно упростить, если считать, что углы поворотов, удлинения и сдвиги малы по сравнению с единицей. Прежде всего отметим, что в формулы (1.21) для компонент деформации входят

- а) параметры e_{ij} линейно;
- б) произведения параметров e_{ij} один на другой;
- в) произведения параметров ω_j один на другой;
- г) произведения параметров e_{ij} и ω_k ;

Следовательно, в том случае, когда малы по сравнению с единицей величины e_{ij} и ω_k возможны два варианта:

- 1) величины ω_k являются малыми того же порядка или более высокого, что и величины e_{ij} ;
- 2) величины e_{ij} являются малыми того же порядка или более высокого, что и величины ω_k^2 .

В первом случае в (1.21) нужно сохранить только линейные члены. В результате получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} \approx e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{yy} \approx e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_{zz} \approx e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{xy} \approx e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \varepsilon_{xz} \approx e_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yz} \approx e_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}\tag{1.32}$$

Во втором случае в (1.21) следует оставить только члены видов а) и в), сохраняя при этом величины порядка ω_k^2 . Члены видов б) и г) нужно отбросить, поскольку члены вида б) будут не ниже четвертого, а члены вида г) — не ниже, чем третьего порядка малости (если считать за величины первого порядка малости параметры ω_k .) В результате соответствующих упрощений получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} \approx e_{xx} &+ \frac{1}{2}(\omega_y^2 + \omega_z^2), & \varepsilon_{xy} \approx e_{xy} &- \omega_x \omega_y, \\ \varepsilon_{yy} \approx e_{yy} &+ \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_z^2), & \varepsilon_{xz} \approx e_{xz} &- \omega_x \omega_z, \\ \varepsilon_{zz} \approx e_{zz} &+ \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2), & \varepsilon_{yz} \approx e_{yz} &- \omega_y \omega_z.\end{aligned}\tag{1.33}$$

Приближенные выражения (1.32) используются при решении задач, когда при малых компонентах тензора деформаций и углах поворота те и другие являются малыми величинами примерно одинакового порядка. Это, например, имеет место, когда решаются задачи о деформировании массивных тел, все размеры которых сравнимы по величине друг с другом.

Приближенные выражения (1.33) используются тогда, когда при малых деформациях и углах поворота углы поворота существенно превосходят деформации. Эти соотношения используются при решении задач о деформировании гибких тел (таких, как стержни, пластины, оболочки).

1.1.11 Уравнения совместности деформаций

Уравнения (1.21) можно рассматривать как систему шести уравнений в частных производных для определения трех компонент вектора перемещения u_i . Это переопределенная система и в общем случае не имеет решения при произвольном выборе компонент тензора деформаций ε_{ij} . Для того, чтобы существовали однозначные и непрерывные компоненты вектора перемещения, компоненты деформаций ε_{ij} должны удовлетворять условиям разрешимости системы уравнений (1.21). Выпишем эти уравнения для случая бесконечно малых деформаций и углов поворотов (соотношения (1.32)). В этом случае уравнения совместности деформаций представляют собой шесть линейных уравнений относительно компонент тензора деформаций:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial x \partial z} &= 0,\end{aligned}\tag{1.34}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) &= 0.\end{aligned}$$

В соответствии с (1.32) в (1.34) нужно положить

$$\varepsilon_{ij} \approx e_{ij}$$

Соотношения (1.34) используются в линейной теории упругости.

Геометрический смысл соотношений (1.34) состоит в том, что если задать компоненты деформации ε_{ij} как произвольные, независимые друг от друга функции координат точек тела, то непрерывность этих функций еще не будет гарантировать того, что тело в результате такой деформации останется

сплошным. А именно, разбив мысленно тело до деформации на бесчисленное множество бесконечно малых прямоугольных параллелепипедов с ребрами, параллельными координатным осям, и придав затем ребрам и граням этих параллелепипедов удлинения и сдвиги в соответствии с произвольно выбранными компонентами тензора деформаций, мы не сможем затем составить из получающихся при этом косоугольных параллелепипедов сплошное деформированное тело без зазоров между гранями и ребрами элементарных объемных элементов.

Если же величины ε_{ij} удовлетворяют соотношениям (1.34), то из косоугольных параллелепипедов будет собрано сплошное деформированное тело без зазоров между гранями и ребрами элементарных объемных элементов.

1.2 Напряжения в сплошной среде

1.2.1 Общие свойства поля напряжений

Материал, изложенный в этой главе содержится в монографии [2].

Рассмотрим покоящуюся среду, находящуюся в равновесии под действием каких-либо распределенных сил, приложенных к ней. Эти силы могут быть приложены к поверхности тела, заполненного средой, или к его внутренним частям. Мы предположим, что эти последние (они называются массовыми или объемными силами) описываются векторной плотностью распределения $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3)$ так, что полная сила, действующая на элементарный внутренний объем $dx_1 dx_2 dx_3$ равна $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$. Здесь x_1, x_2, x_3 — декартова система координат.

Поверхностная сила описывается поверхностной векторной плотностью $\mathbf{P}(x_1, x_2, x_3)$, определенной только в точках поверхности, а полная сила, действующая на элемент поверхности ds , равна $\mathbf{P} ds$. Компоненты векторных плотностей \mathbf{F} и \mathbf{P} будем предполагать кусочно гладкими функциями точек объема или поверхности соответственно. Тем самым исключаются из рассмотрения случаи, когда приложенные силы сосредоточены в точках или когда объемные силы сосредоточены на внутренних поверхностях. В дальнейшем удобно представить плотность \mathbf{F} в виде $\rho \mathbf{F}$, где $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3)$ — плотность среды. *Плотность* — это масса, заключенная в единице объема. Точнее было бы сказать, что *плотность* — это отношение массы бесконечно малого элемента к его объему. Итак \mathbf{F} — это массовая плотность силы, т.е. сила, действующая на единицу массы. Компоненты вектора \mathbf{F} массовой плотности силы в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 будем обозначать через F_i :

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

Сделаем в напряженной среде, находящейся в равновесии, надрез вдоль какой либо плоскости $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = \text{const}$. Чтобы этот надрез не нарушил в среде равновесия, к обеим его берегам нужно приложить поверхностные распределенные силы. Сейчас мы **постулируем**, что в каждой точке разреза плотность силы, приложенной к одному берегу должна быть равна по величине и противоположна по направлению плотности силы, действующей на другой берег разреза. В дальнейшем это предположение будет обосновано при некоторых предположениях.

Рассмотрим объем, занимаемый средой и рассекаемый разрезом на две части, которые назовем условно “нижней” и “верхней”. “Верхним” объемом назовем тот объем, в сторону которого направлен вектор нормали $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, задающий направление разреза, а “нижним” берегом разреза — берег, примыкающий к “нижнему” объему (рис. 1.5).

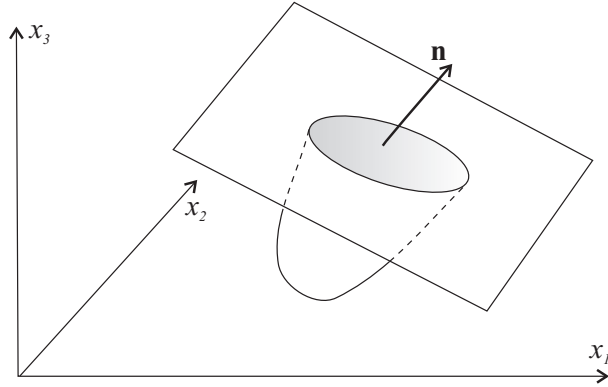


Рис. 1.5: К определению вектора напряжений

Плотность поверхностной силы (сила на единицу площади), приложенной к “нижнему” берегу, называется *вектором напряжения* и обозначается Σ . Ясно, что напряжение, вообще говоря зависит как от точки приложения (x_1, x_2, x_3) , так и от направления, задаваемого единичным вектором нормали с компонентами (n_1, n_2, n_3) . Заметим, что $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Итак, $\Sigma = \Sigma(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3)$. То, что на противоположных берегах надреза напряжения противоположно направлены, записывается равенством

$$\Sigma(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3) = -\Sigma(x_1, x_2, x_3; -n_1, -n_2, -n_3).$$

Компоненты вектора Σ обозначим через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, т.е.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_i = \sigma_i(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3).$$

Специальные обозначения используются для обозначения компонент вектора напряжения на площадках, перпендикулярных координатным осям. На площадках, нормаль к которым направлена вдоль положительного направления оси x_1 ($n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 0$), компоненты вектора напряжения обозначаются

через $\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31}$:

$$\begin{aligned}\sigma_1(x_1, x_2, x_3; 1, 0, 0) &= \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3), \\ \sigma_2(x_1, x_2, x_3; 1, 0, 0) &= \sigma_{21}(x_1, x_2, x_3), \\ \sigma_3(x_1, x_2, x_3; 1, 0, 0) &= \sigma_{31}(x_1, x_2, x_3),\end{aligned}$$

Аналогично, через $\sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{32}$ обозначаются компоненты вектора напряжения на площадках с нормалью, направленной вдоль оси x_2 :

$$\begin{aligned}\sigma_1(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 0) &= \sigma_{12}(x_1, x_2, x_3), \\ \sigma_2(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 0) &= \sigma_{22}(x_1, x_2, x_3), \\ \sigma_3(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 0) &= \sigma_{32}(x_1, x_2, x_3),\end{aligned}$$

а через $\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$ — составляющие вектора напряжения на площадках с нормалью вдоль оси x_3 :

$$\begin{aligned}\sigma_1(x_1, x_2, x_3; 0, 0, 1) &= \sigma_{13}(x_1, x_2, x_3), \\ \sigma_2(x_1, x_2, x_3; 0, 0, 1) &= \sigma_{23}(x_1, x_2, x_3), \\ \sigma_3(x_1, x_2, x_3; 0, 0, 1) &= \sigma_{33}(x_1, x_2, x_3).\end{aligned}$$

Совокупность компонент векторов напряжений на площадках, перпендикулярных координатным осям, обычно записывается в виде квадратной матрицы

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \|\sigma_{ij}\|,$$

которая называется *тензором напряжений*. При ортогональных преобразованиях декартовых координат эта таблица, описывающая напряженное состояние в некоторой точке (x_1, x_2, x_3) , преобразуется так, как должен преобразовываться ортогональный тензор.

Первый столбец матрицы $\|\sigma_{ij}\|$ состоит из компонент вектора напряжений на площадке с нормалью, направленной вдоль оси x_1 , второй и третий — соответственно из компонент вектора напряжений на площадках с нормальями, параллельными координатным осям x_2 и x_3 .

Важным свойством тензора напряжений является следующее утверждение.

Задание тензора напряжений в точке полностью задает напряженное состояние в этой точке, позволяя вычислить напряжение на любой площадке, проходящей через эту точку.

Чтобы обосновать это утверждение, надо воспользоваться тем, что рассматриваемая среда находится в равновесии под действием приложенных к ней массовых и поверхностных сил. Выделим из среды произвольный объем V , ограниченный поверхностью S . Напишем условие равновесия среды, заключенной в выделенном объеме:

$$\int_S \boldsymbol{\Sigma}(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3) dS + \int_V \int \int \rho \mathbf{F} dx_1 dx_2 dx_3 = 0.$$

Это условие состоит в равенстве нулю суммы всех сил, приложенных к объему. Через n_1, n_2, n_3 обозначены компоненты единичной нормали к поверхности S в точке x_1, x_2, x_3 . Покомпонентно условие равновесия записывается в виде трех равенств

$$\int_S \int \sigma_i(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3) dS + \int_V \int \int \rho F_i dx_1 dx_2 dx_3 = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Лемма. Если непрерывные кусочно гладкие функции $\sigma(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3)$ и $f(x_1, x_2, x_3)$ таковы, что для любого внутреннего объема V , ограниченного поверхностью S , имеет место равенство

$$\int_S \int \sigma(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3) dS + \int_V \int \int f dx_1 dx_2 dx_3 = 0,$$

то зависимость $\sigma(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3)$ от n_1, n_2, n_3 описывается формулой

$$\begin{aligned} \sigma(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3) = & n_1 \sigma(x_1, x_2, x_3; 1, 0, 0) + \\ & + n_2 \sigma(x_1, x_2, x_3; 0, 1, 0) + n_3 \sigma(x_1, x_2, x_3; 0, 0, 1). \end{aligned}$$

В формулировке леммы можно отказаться от требования непрерывности σ по последним трем аргументам n_1, n_2, n_3 . Доказательство леммы приведено в [2].

Из этой леммы, очевидно, вытекает, что $\sigma_i = \sigma_{i1}n_1 + \sigma_{i2}n_2 + \sigma_{i3}n_3$ или в векторной форме

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

В частности, отсюда следует равенство

$$\Sigma(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3) = -\Sigma(x_1, x_2, x_3; -n_1, -n_2, -n_3).$$

которое постулировалось в начале пункта.

До сих пор мы предполагали, что среда находится в равновесии под действием приложенных сил. На самом деле все выводы относительно свойств поля напряжений справедливы и для движущейся среды, находящейся под действием гладко распределенных массовых и поверхностных сил, если в рассматриваемом объеме скорости и ускорения частиц ограничены и описываются кусочно гладкими непрерывными функциями координат и времени. Чтобы убедиться в этом, повторим кратко еще раз проводившиеся рассуждения, но уже с учетом новых обстоятельств.

Начнем с того, что в напряженной движущейся среде в некоторый момент времени t сделаем вдоль какой-либо плоскости $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = \text{const}$ ($n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$) надрез. Предположим, что сделав надрез, мы прикладываем к его берегам такие дополнительные усилия, чтобы движение, благодаря этим усилиям, в среде с надрезом было бы точно таким же, каким оно было в его отсутствие. Это дополнительное усилие, приложенное к нижнему берегу надреза на площадке с нормалью (n_1, n_2, n_3) и площадью dS , проходящей через точку (x_1, x_2, x_3) обозначим через $\Sigma(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3)dS$, а вектор плотности (на единицу площади) этой силы Σ с компонентами $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ будем называть *напряжением* на этой площадке.

При повороте площадки, проходящей через некоторую фиксированную точку, вектор Σ преобразуется точно так же, как и в покоящейся среде, находящейся в равновесии. Чтобы обосновать это утверждение, мы должны воспользоваться законом сохранения количества движения (импульса). Рассмотрим некоторую гладкую поверхность S , ограничивающую объем V . Выделим массу среды, заполнявшую в некоторый момент времени t этот объем V . Пусть плотность среды обозначается как $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3; t)$, компоненты вектора скорости как $u_i(x_1, x_2, x_3; t)$. Тогда импульс (количество движения) выделенной массы вычислится как вектор с компонентами

$$p_i = \int \int \int_{V(t)} \rho(x_1, x_2, x_3; t) u_i(x_1, x_2, x_3; t) dx_1 dx_2 dx_3.$$

Выделив этот объем в некоторый момент времени, мы должны во все последующие моменты времени считать его изменяющимся, так как он образован

движущейся средой, границы которой в начальный момент времени совпадали с границей выделенного в этот момент объема.

Производная $\frac{dp_i(t)}{dt}$ от компонент количества движения по времени может быть вычислена через ускорения

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3}$$

частиц среды, составляющих объем $V(t)$:

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \int \int \int_{V(t)} \rho \frac{du_i}{dt} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Масса вещества в выделенном объеме

$$m = \int \int \int_{V(t)} \rho(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

не зависит от времени.

Производная по времени от импульса является вектором $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ с компонентами $\frac{dp_i(t)}{dt}$, который должен равняться сумме сил, приложенных к массе вещества, заключенной в выделенном движущемся объеме:

$$\begin{aligned} & \int \int_{S(t)} \boldsymbol{\Sigma}(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3; t) dS + \\ & + \int \int \int_{V(t)} \rho(x_1, x_2, x_3, t) \mathbf{F}(x_1, x_2, x_3, t) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \end{aligned}$$

Двойной интеграл берется по поверхности, ограничивающей выделенный объем (n_1, n_2, n_3 — компоненты нормали к поверхности). Покомпонентная запись этого равенства

$$\begin{aligned} & \int \int_{S(t)} \sigma_i(x_1, x_2, x_3; n_1, n_2, n_3; t) dS + \\ & + \int \int \int_{V(t)} \rho(x_1, x_2, x_3, t) \left[F_i(x_1, x_2, x_3, t) - \frac{du_i}{dt} \right] dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \end{aligned}$$

отличается от условия равновесия в стационарном случае лишь тем, что F_i теперь надо заменить на $F_i - \frac{du_i}{dt}$. Точно так же, как и в стационарном случае, используя ту же самую лемму, мы доказываем, что напряжения на любой

площадке с единичным вектором нормали (n_1, n_2, n_3) определяются по напряжениям на площадках, параллельных координатным плоскостям по формуле

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}.$$

Эта матричная запись говорит о том, что для того, чтобы получить вектор напряжения на площадке с нормалью достаточно применить матрицу тензора напряжений к этому единичному вектору нормали.

Тензор напряжений полностью определяет напряженное состояние в точке, как в покоящейся, так и в движущейся среде.

Здесь, однако, надо еще раз подчеркнуть, что в приведенных выше рассуждениях мы существенно пользовались ограниченностью ускорений.

Зададимся теперь вопросом о том,

однозначно ли определяется тензор напряжений из закона сохранения количества движения при заданных распределениях массовых и поверхностных сил в случае, если закон движения среды, определяемый полем ускорений, известен.

Начнем с интегральной покомпонентной записи уже известного нам равенства, связывающего напряжения с ускорениями и массовыми силами:

$$\int \int_{S(t)} (\sigma_{i1}n_1 + \sigma_{i2}n_2 + \sigma_{i3}n_3) dS + \int \int \int_{V(t)} \rho \left[F_i - \frac{du_i}{dt} \right] dx_1 dx_2 dx_3 = 0.$$

В этой записи учтена зависимость напряжений от направления нормали к площадке dS . Так как объем вместе с ограничивающей его поверхностью, может быть для любого момента времени выбран произвольно (после этого для других он уже определяется законом движения), то можно считать, что при любом фиксированном значении t равенство имеет место для любой области интегрирования. При достаточной гладкости всех участвующих функций, как известно из анализа, устанавливается эквивалентность этого равенства дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} = \rho \left(F_i - \frac{du_i}{dt} \right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.35)$$

Вопрос о том, однозначно ли определяется тензор напряжений, теперь может быть сформулирован как вопрос о том, единственно ли решение системы

из трех выписанных дифференциальных уравнений при заданных правых частях ($\rho (F_i - \frac{du_i}{dt})$) и заданных граничных значениях $\sigma_{i1}n_1 + \sigma_{i2}n_2 + \sigma_{i3}n_3$ поверхностных сил (n_1, n_2, n_3 — компоненты единичного вектора нормали к граничной поверхности).

В [2], показано, что единственного решения нет.

Таким образом, для определения поля напряжений должны быть привлечены дополнительные соображения и постулаты.

Очень важное свойство таблицы $\|\sigma_{ij}\|$, характеризующей напряженное состояние в некоторой точке, может быть получено из рассмотрения закона сохранения момента количества движения.

Моментом количества движения, заключенным в некотором объеме сплошной среды, называют интеграл по объему

$$\int \int \int_{V(t)} \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{u}) dx_1 dx_2 dx_3$$

от векторного произведения радиуса вектора \mathbf{x} (с компонентами x_1, x_2, x_3) на вектор плотности импульса $\rho \mathbf{u}$ (его компоненты $\rho u_1, \rho u_2, \rho u_3$). В этом определении момент вычисляется относительно начала координат. Если мы хотим вычислить момент количества движения относительно какой-либо другой точки \mathbf{x}_0 , то мы должны использовать интеграл

$$\int \int \int_{V(t)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times (\rho \mathbf{u}) dx_1 dx_2 dx_3,$$

определяющий вектор с компонентами

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{V(t)} [(x_2 - x_{20})u_3 - (x_3 - x_{30})u_2] \rho dx_1 dx_2 dx_3, \\ & \int \int \int_{V(t)} [(x_3 - x_{30})u_1 - (x_1 - x_{10})u_3] \rho dx_1 dx_2 dx_3, \\ & \int \int \int_{V(t)} [(x_1 - x_{10})u_2 - (x_2 - x_{20})u_1] \rho dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

В качестве \mathbf{x}_0 часто выбирается центр тяжести рассматриваемой массы вещества.

Изменение с течением времени момента количества движения в некотором движущемся объеме, образованным некоторыми фиксированными частицами рассматриваемой среды, происходит за счет момента приложенных к этой массе внешних сил.

Таким образом, в дальнейшем мы исключаем из рассмотрения источники моментов.

В классической среде для любой фиксированной точки $\mathbf{x}_0(x_{10}, x_{20}, x_{30})$ и для любого движущегося объема $V(t)$, образованного во все моменты времени t на рассматриваемом интервале времени одними и теми же частицами, уравнение момента количества движения имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \int \int (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times (\rho \mathbf{u}) dx_1 dx_2 dx_3 = \\ = \int_{S(t)} \int (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \boldsymbol{\Sigma} dS + \int_{V(t)} \int \int (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times (\rho \mathbf{F}) dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

Двойной интеграл в правой части — это момент напряжений $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(x_1, x_2, x_3)$, действующих на поверхность $S(t)$, ограничивающую рассматриваемый объем $V(t)$, а тройной интеграл — момент массовых сил относительно точки \mathbf{x}_0 , действующих в этом объеме.

Рассматривая уравнение момента количества движения для последовательности объемов $V_1(t), V_2(t), \dots, V_N(t), \dots$, определенных каждый как объем, занимаемый веществом, которое при некотором $t = t^*$ заполняло объем $V_N(t^*)$ с ребром h_N ($h_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$), можно показать [2], что тензор напряжений симметричен, т.е. имеют место равенства

$$\sigma_{32} - \sigma_{23} = \sigma_{13} - \sigma_{31} = \sigma_{21} - \sigma_{12} = 0$$

при всех x и t .

1.2.2 Напряженное состояние в точке

Изучим напряженное состояние в точке. Как известно из линейной алгебры, любая симметричная матрица представима в виде

$$\|\sigma_{ij}\| = U \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} U^*,$$

где матрица U ортогональна. Перейдем к новой системе координат с помощью ортогональной матрицы W

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

и установим, что тензор напряжений в этой системе координат запишется так:

$$\|\sigma'_{ij}\| = W\|\sigma_{ij}\|W^* = WU \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} U^*W^*.$$

Из этой записи очевидно, что положив $W = U^*$, мы придем к системе координат, в которой тензор напряжений оказывается следующего простого вида:

$$\|\sigma'_{ij}\| = U^*U \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} U^*U = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}.$$

Описанная процедура называется *приведением тензора напряжений к главным осям*.

Напряжения на трех площадках, перпендикулярных главным осям, представляют векторы, направленные по этим осям. Величины этих напряжений s_1, s_2, s_3 , нормальных к площадкам, называются *главными напряжениями* и могут быть вычислены как характеристические корни матрицы

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - s & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - s & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - s \end{vmatrix} = 0.$$

Для главных напряжений здесь выбраны обозначения s_1, s_2, s_3 , а не $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, которые часто используются для той же цели, чтобы оставить обозначения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ для компонент вектора напряжений на какой-либо площадке.

Занимаясь изучением напряженного состояния в некоторой точке, мы будем предполагать, что система координат выбрана так, что в этой точке тензор напряжений приведен к главным осям и, следовательно, имеет вид

$$\|\sigma_{ik}\| = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}.$$

Вектор напряжения, действующий на площадке с единичной нормалью \mathbf{n} , имеющей компоненты n_1, n_2, n_3 ($n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$), определяется так:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 n_1 \\ s_2 n_2 \\ s_3 n_3 \end{bmatrix}.$$

Спроектируем этот вектор на нормаль к площадке и на саму эту площадку. Длины проекций представляют собой нормальное $\sigma_{\text{норм}}$ к площадке и касательное к ней $\sigma_{\text{кас}}$ напряжения. Очевидно, что

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{норм}} &= (\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{n}) = s_1 n_1^2 + s_2 n_2^2 + s_3 n_3^2, \\ \sigma_{\text{норм}}^2 + \sigma_{\text{кас}}^2 &= (\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Sigma}) = s_1^2 n_1^2 + s_2^2 n_2^2 + s_3^2 n_3^2.\end{aligned}$$

1.3 Диаграмма Мора

. Пусть нам известны главные напряжения, а также нормальная и касательная составляющие напряжения на некоторой площадке. Можно ли определить направление такой площадки?

Координаты единичного вектора нормали к такой площадке должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned}n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1, \\ s_1 n_1^2 + s_2 n_2^2 + s_3 n_3^2 &= \sigma_{\text{норм}}, \\ s_1^2 n_1^2 + s_2^2 n_2^2 + s_3^2 n_3^2 &= \sigma_{\text{норм}}^2 + \sigma_{\text{кас}}^2.\end{aligned}$$

Это линейная система алгебраических уравнений относительно n_1^2, n_2^2, n_3^2 с определителем Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1^2 & s_2^2 & s_3^2 \end{vmatrix},$$

отличным от нуля, если среди главных напряжений нет равных. Решая эту систему, найдем

$$\begin{aligned}n_1^2 &= \frac{\left(\sigma_{\text{норм}} - \frac{s_2 + s_3}{2}\right)^2 + \sigma_{\text{кас}}^2 - \left(\frac{s_2 - s_3}{2}\right)^2}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)}, \\ n_2^2 &= \frac{\left(\sigma_{\text{норм}} - \frac{s_3 + s_1}{2}\right)^2 + \sigma_{\text{кас}}^2 - \left(\frac{s_3 - s_1}{2}\right)^2}{(s_2 - s_3)(s_2 - s_1)}, \\ n_3^2 &= \frac{\left(\sigma_{\text{норм}} - \frac{s_1 + s_2}{2}\right)^2 + \sigma_{\text{кас}}^2 - \left(\frac{s_1 - s_2}{2}\right)^2}{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)},\end{aligned}$$

Пусть оси выбраны так, что для главных напряжений выполняются неравенства $s_3 > s_2 > s_1$. Тогда для неотрицательности правых частей в выражениях для n_1^2, n_2^2, n_3^2 необходимо и достаточно выполнения неравенств

$$\left(\sigma_{\text{норм}} - \frac{s_2 + s_3}{2} \right)^2 + \sigma_{\text{кас}}^2 \geq \left(\frac{s_2 - s_3}{2} \right)^2$$

$$\left(\sigma_{\text{норм}} - \frac{s_3 + s_1}{2} \right)^2 + \sigma_{\text{кас}}^2 \geq \left(\frac{s_3 - s_1}{2} \right)^2$$

$$\left(\sigma_{\text{норм}} - \frac{s_1 + s_2}{2} \right)^2 + \sigma_{\text{кас}}^2 \geq \left(\frac{s_1 - s_2}{2} \right)^2$$

Изобразим допускаемую этими неравенствами область значений на плоскости $(\sigma_{\text{норм}}, \sigma_{\text{кас}})$.

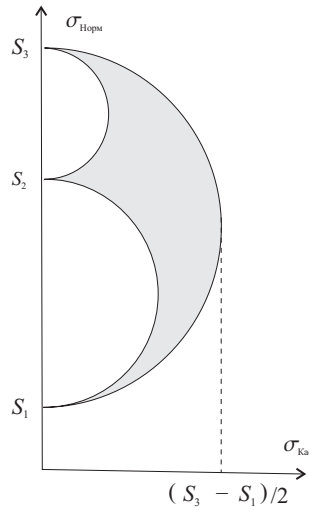


Рис. 1.6: Круги Мора

На рис. 1.6 эта область заштрихована между полуокружностями, построенными на отрезках $[s_1, s_2]$, $[s_2, s_3]$, $[s_1, s_3]$, оси $\sigma_{\text{норм}}$, как на диаметрах. Диаграмма, показанная на рис. 1.6 называется “диаграммой Мора”. Из диаграммы Мора видно, что наибольшее касательное напряжение равно $(s_3 - s_1)/2$, при этом нормальное напряжение на этой площадке обязано быть равным $(s_3 + s_1)/2$. Определим, на какой площадке достигается наибольшее касательное напряжение. Для этого при заданных значениях $\sigma_{\text{кас}} = (s_3 - s_1)/2$ и $\sigma_{\text{норм}} = (s_3 + s_1)/2$ вычислим по нашим формулам n_1^2, n_2^2, n_3^2 . В результате получим: $n_1^2 = 1/2$, $n_2^2 = 0$, $n_3^2 = 1/2$.

Таким образом, наибольшее касательное напряжение достигается на площадках с нормальными $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3) : n_1 = \pm 1/\sqrt{2}, n_2 = 0, n_3 = \pm(\mp)1/\sqrt{2}$, т.е. на плоскостях, делящих пополам угол между плоскостями с наибольшим и наименьшим нормальными напряжениями s_1, s_3 .

Матрицу, характеризующую напряженное состояние, обычно раскладывают в сумму двух матриц (матрицу, кратной единичной, и матрицу с нулевым следом, называемую *девиатором* тензора напряжений):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{bmatrix},$$

где

$$\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3.$$

Если

$$\|\sigma_{ik}\| = U \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} U^* \quad (UU^* = I),$$

то

$$\|\sigma_{ik} - \delta_{ik}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3\| =$$

$$= U \begin{bmatrix} s_1 - \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & s_2 - \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & s_3 - \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3} \end{bmatrix} U^*.$$

При одновременном увеличении или уменьшении всех диагональных элементов матрицы $\|\sigma_{ik}\|$ на одно и то же число описываемые ею касательные напряжения на площадках не меняются. Это очевидно из диаграммы Мора. Говорят, что совокупность касательных напряжений характеризуется девиатором тензора напряжений. След тензора напряжений, поделенный на 3, называется *средним напряжением*.

1.3.1 Теорема взаимности

Рассмотрим вектор напряжения, действующий на площадку, перпендикулярную некоторому вектору \mathbf{x} :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \\ \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \\ \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \end{pmatrix}$$

с компонентами $\sigma_i = \sigma_{ij}/\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, и вычислим его проекцию на некоторый другой вектор \mathbf{y} , которая определяется формулой

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} (\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{y}) &= \frac{\sigma_i y_i}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} = \frac{(\sigma_{ij} x_j) y_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} = \\ &= \frac{\sigma_{ij} y_i x_j}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} \end{aligned}$$

Благодаря симметрии $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ это выражение симметрично относительно векторов \mathbf{y} , \mathbf{x} .

Закон взаимности. *Проекция на вектор \mathbf{y} напряжения на площадке, перпендикулярной вектору \mathbf{x} , равна проекции на вектор \mathbf{x} напряжения на площадке, перпендикулярной вектору \mathbf{y} .*

Как правило, в качестве меры интенсивности касательных напряжений принимают либо величину

$$\sqrt{\frac{(s_2^2 - s_3^2)^2 + (s_3^2 - s_1^2)^2 + (s_1^2 - s_2^2)^2}{6}},$$

либо величину максимального касательного напряжения

$$\max |(s_i - s_j)|.$$

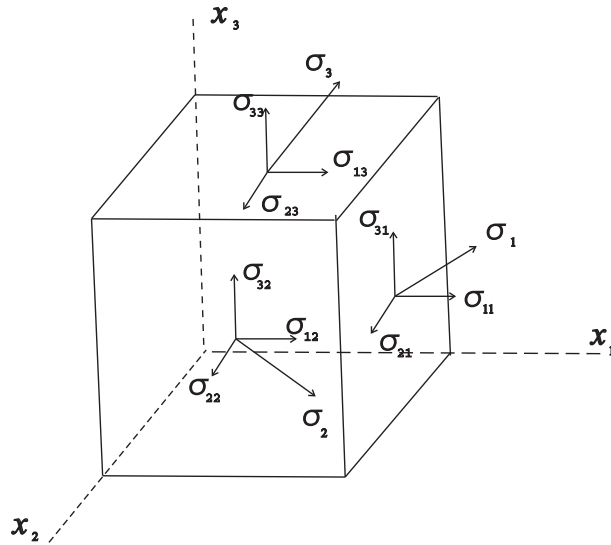


Рис. 1.7: Физический смысл компонент тензора напряжений

1.3.2 Геометрическая интерпретация напряженного состояния в точке

Обозначим оси декартовой системы координат через x, y, z и перепишем тензор напряжений в других обозначениях [4]:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix},$$

Физический смысл компонент тензора напряжений показан на рис. 1.7.

Вектор напряжения $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$ на площадке с нормалью $\mathbf{n}(n_x, n_y, n_z)$ (рис. 1.8) вычисляется по формулам

$$p_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z$$

$$p_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z$$

$$p_z = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z$$

Нормальная составляющая (рис. 1.8) вычисляется по формуле:

$$\sigma_n = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + \sigma_z n_z^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + 2\tau_{yz} n_y n_z + 2\tau_{zx} n_x n_z$$

Касательная составляющая (рис. 1.8) вычисляется по формуле:

$$\tau_n = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \sigma_n^2}$$

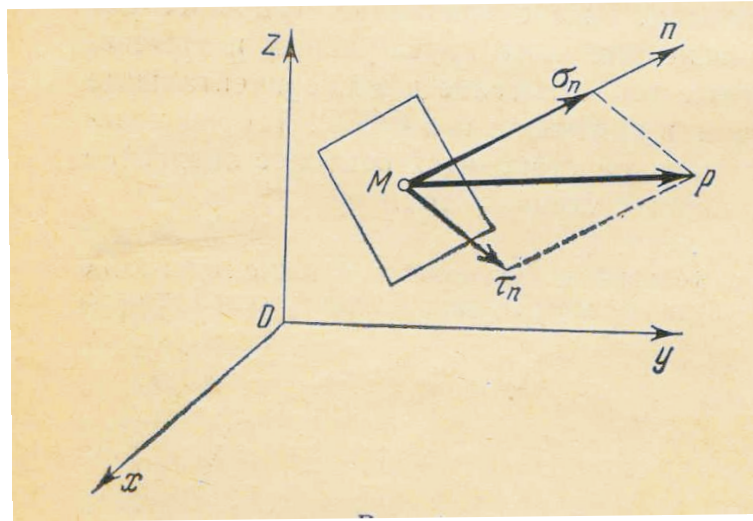


Рис. 1.8: Разложение вектора напряжений на нормальную и касательную составляющие

В каждой точке среды существуют три главных направления и три взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Нормальные напряжения на этих площадках называются главными напряжениями. Пронумеруем главные оси так, чтобы выполнялись неравенства

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

Тензор напряжений, отнесенный к главным осям имеет вид

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

На площадках, делящих пополам углы между главными плоскостями и проходящих соответственно через главные оси 1, 2, 3 (рис. 1.9), касательные напряжения по абсолютной величине равны

$$\frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3|, \quad \frac{1}{2} |\sigma_3 - \sigma_1|, \quad \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|$$

Касательные напряжения в этих сечениях достигают экстремальных значений и называются главными. Введем для них обозначения

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2},$$

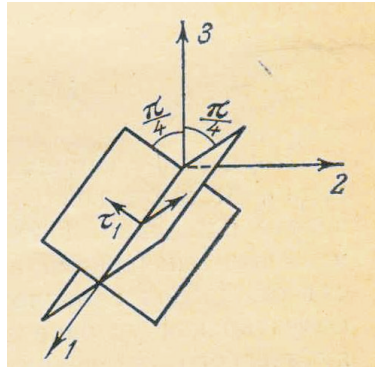


Рис. 1.9: Площадки, на которых действуют максимальные касательные напряжения

Наибольшее касательное напряжение τ_{\max} при принятой нумерации главных осей равно

$$\tau_{\max} = -\tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Нормальные напряжения, на которых действуют главные касательные напряжения соответственно равны

$$\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \quad \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}, \quad \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2},$$

Главные напряжения являются корнями кубического уравнения

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

или

$$-\lambda^3 + I_1(T_\sigma)\lambda^2 + I_2(T_\sigma)\lambda + I_3(T_\sigma) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} I_1(T_\sigma) &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2(T_\sigma) &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\ I_3(T_\sigma) &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned}$$

Величина

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

называется средним давлением в точке.

Девiator напряжений

Представим тензор напряжений в виде суммы

$$T_\sigma = \sigma T_1 + D_\sigma,$$

где

$$\sigma T_1 = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

— шаровой тензор,

$$D_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix}$$

— девиатор напряжений

Нормальные составляющие девиаторы будем обозначать через

$$s_x = \sigma_x - \sigma, \quad s_y = \sigma_y - \sigma, \quad s_z = \sigma_z - \sigma$$

Главные направления девиатора и тензора напряжений совпадают, а главные значения s_i отличаются от σ_i на величину среднего давления σ и являются корнями кубического уравнения

$$-\lambda^3 + I_1(D_\sigma)\lambda^2 + I_2(D_\sigma)\lambda + I_3(D_\sigma) = 0, \quad (1.36)$$

где

$$I_1(D_\sigma) = 0$$

$$I_2(D_\sigma) = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

$$I_3(D_\sigma) = s_1 s_2 s_3.$$

Неотрицательная величина

$$T = \sqrt{I_2(D_\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

называется *интенсивностью касательных напряжений*.

Интенсивность касательных напряжений обращается в нуль только в том случае, когда напряженное состояние в точке является состоянием "гидростатического" давления.

Для чистого сдвига

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau$$

и, следовательно,

$$T = \tau.$$

В случае простого растяжения (сжатия) в направлении оси x

$$\sigma_x = \sigma_1, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

и, следовательно,

$$T = \frac{|\sigma_1|}{\sqrt{3}}.$$

Можно показать, что кубическое уравнение (1.36) имеет вещественные корни. Поэтому его решение находится в тригонометрической форме. Главные компоненты девиатора можно выразить через инварианты

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}}T \cos\left(\omega_\sigma - \frac{\pi}{3}\right), \\ s_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}}T \cos\left(\omega_\sigma + \frac{\pi}{3}\right), \\ s_3 &= -\frac{2}{\sqrt{3}}T \cos \omega_\sigma. \end{aligned}$$

Для главных касательных напряжений получим следующие выражения

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -T \sin\left(\omega_\sigma - \frac{\pi}{3}\right), \\ \tau_2 &= -T \sin\left(\omega_\sigma + \frac{\pi}{3}\right), \\ \tau_3 &= -T \sin \omega_\sigma. \end{aligned}$$

Используя неравенства

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3,$$

можно показать, что величина ω_σ изменяется в пределах

$$0 \leq \omega_\sigma \leq \frac{\pi}{3}.$$

Учитывая это неравенство, и поскольку $\tau_{\max} = -\tau_2$, получим

$$1 \leq \frac{T}{\tau_{\max}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

С наибольшей погрешностью (около 7%) имеем

$$T \approx 1,08\tau_{\max}$$

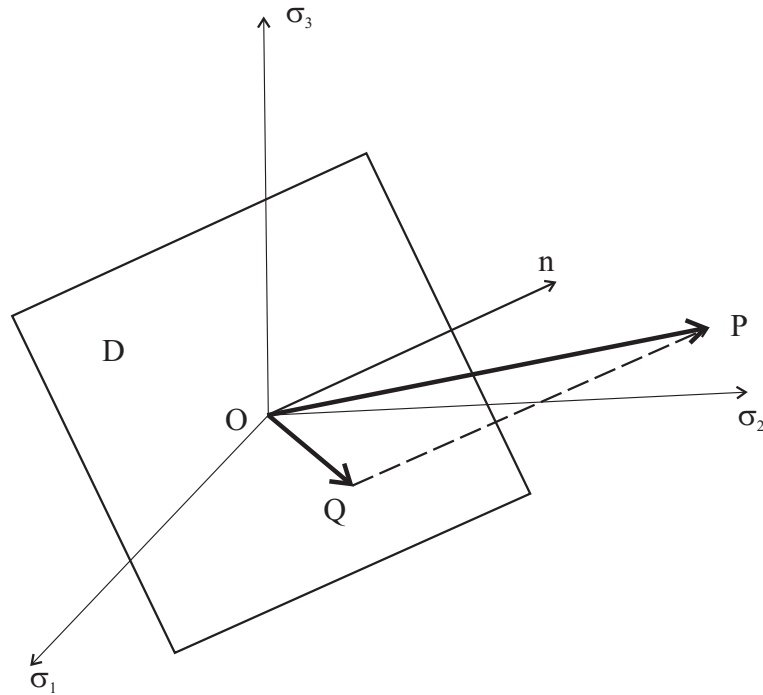


Рис. 1.10: Девиаторная плоскость

Главные напряжения вычисляются через среднее напряжение σ , интенсивность касательных напряжений T , и величину ω_σ .

Напряженное состояние в точке в пространстве главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ представляется вектором **OP** с компонентами $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Плоскость

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

проходит через начало координат, равно наклонена к осям и называется девиаторной плоскостью (Рис. 1.10). Единичный вектор нормали к этой плоскости есть

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3)$$

Прямая линия

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3,$$

проходящая через начало координат и перпендикулярная к плоскости $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ называется гидростатической осью.

Вектор \mathbf{OP} представляется в виде

$$\mathbf{OP} = \sigma_1 \mathbf{i}_1 + \sigma_2 \mathbf{i}_2 + \sigma_3 \mathbf{i}_3$$

Проекция вектора \mathbf{OP} на нормаль пропорциональна среднему давлению

$$(\mathbf{OP} \cdot \mathbf{n}) = \sqrt{3}\sigma.$$

Введем вектор

$$\mathbf{OQ} = s_1 \mathbf{i}_1 + s_2 \mathbf{i}_2 + s_3 \mathbf{i}_3,$$

изображающий девиатор D_σ .

Очевидно, что

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OQ} + \sqrt{3}\sigma \mathbf{n}$$

и

$$(\mathbf{OQ} \cdot \mathbf{n}) = 0.$$

Следовательно, вектор \mathbf{OQ} лежит в девиаторной плоскости $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$.

Длина вектора \mathbf{OQ} пропорциональна интенсивности касательных напряжений

$$|\mathbf{OQ}| = \sqrt{2}T.$$

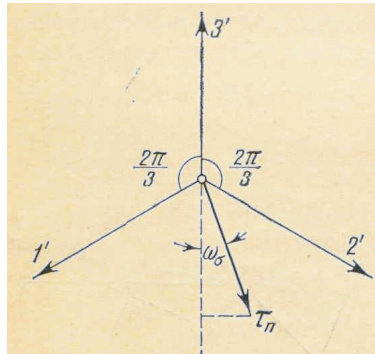


Рис. 1.11: Девиаторная плоскость

Угол ω_σ определяет положение вектора \mathbf{OQ} на девиаторной плоскости.

А именно, угол между вектором \mathbf{OQ} и отрицательной осью Z' равен ω_σ .

Рассмотрим площадку, проходящую через данную точку и равно наклоненную к главным осям (октаэдрическую площадку).

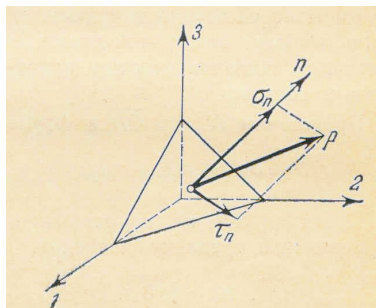


Рис. 1.12: Октаэдрическая площадка

Проекции вектора напряжений p , действующего на октаэдрической площадке в соответствии с формулами Коши будут

$$\frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}, \quad \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}},$$

Нормальное напряжение на этой площадке равно среднему давлению

$$\sigma_n = \sigma,$$

а касательное напряжение τ_n пропорционально T

$$\tau_n = \sqrt{\frac{2}{3}}T.$$

1.4 Упругое тело

1.4.1 Закон Гука



Рис. 1.13: Роберт Гук (18.07.1635 - 03.03.1703) - английский физик, член Лондонского королевского общества (1663), его секретарь в 1667-1683 годах. Родился на острове Уайт.

В 1678 г. английский ученый Роберт Гук на основе результатов проведенных им многочисленных экспериментов сформулировал следующий закон:

«Ut tensio sic vis»

Какова сила, таково удлинение

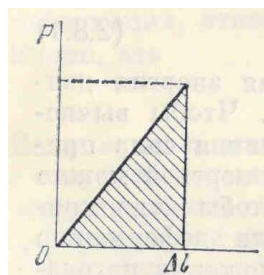


Рис. 1.14: Диаграмма "сила-удлинение"

Обобщение этого закона на случай трехмерного напряженно-деформированного состояния лежит в основе линейной математической теории упругости.

1.4.2 Упругое тело и упругие потенциалы

Будем рассматривать **упругое** тело как механическую консервативную систему [3].

Это означает, что работа внешней силы целиком затрачивается на сообщении телу кинетической энергии и накопление в нем потенциальной энергии:

$$A = T + \tilde{U} \quad (1.37)$$

где A — работа внешних сил, T — кинетическая энергия движения, \tilde{U} — потенциальная энергия деформации.

Для того чтобы вычислить потенциальную энергию, предположим, что внешняя сила прикладывается достаточно медленно. Поэтому в равенстве (1.37) можно пренебречь кинетической энергией:

$$A = \tilde{U} \quad (1.38)$$

Рассмотрим процесс деформации стержня при одноосном растяжении как последовательность бесконечно малых приращений удлинения стержня $d(\Delta l)$, вызываемых увеличением силы P . Тогда работа, произведенная внешней силой P при растяжении стержня на величину Δl будет вычисляться по формуле:

$$A = \tilde{U} = \int_0^{\Delta l} P d(\Delta l) \quad (1.39)$$

Пусть l — длина стержня, F — площадь его поперечного сечения, $V = lF$ — объём стержня.

Тогда $P = \sigma F$, $\Delta l = \varepsilon l$. Здесь σ — напряжение в поперечном сечении стержня, ε — относительная деформация.

С учетом этих обозначений равенство (1.39) примет вид:

$$\tilde{U} = V \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon \quad (1.40)$$

Пусть σ и ε связаны зависимостью $\sigma = \varphi(\varepsilon)$. Тогда

$$\tilde{U} = VU, \quad (1.41)$$

где

$$U = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon = \int_0^\varepsilon \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \quad (1.42)$$

Величина U упругая энергия на единицу объёма.

Для линейного упругого тела $\sigma = E\varepsilon$ получим:

$$U = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (1.43)$$

или

$$\tilde{U} = UV = \frac{EF(\Delta l)^2}{2l} = \frac{P^2 l}{2EF} = \frac{1}{2} P \Delta l \quad (1.44)$$

Преобразование Лежандра

Зависимость n переменных y_1, y_2, \dots, y_n от других n переменных x_1, x_2, \dots, x_n называется потенциальной в том случае, когда существует функция $U(x_k)$ такая, что

$$y_k = \frac{\partial U}{\partial x_k}. \quad (1.45)$$

Если справедливо соотношение (1.45), то существует такая функция $\Phi(y_k)$, что

$$x_k = \frac{\partial \Phi}{\partial y_k}. \quad (1.46)$$

Переход от соотношений (1.45) к соотношениям (1.46) осуществляется с помощью *преобразования Лежандра*:

$$\Phi = x_i y_i - U. \quad (1.47)$$

Действительно,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_k} = x_k + y_i \frac{\partial x_i}{\partial y_k} - \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_k}. \quad (1.48)$$

Но $\frac{\partial U}{\partial x_i} = y_i$. Следовательно, имеет место равенство (1.46).

Дифференцируя (1.47) по ε , получим

$$\sigma = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \quad (1.49)$$

Следовательно, **упругая энергия U является потенциалом напряжений.**

Используя преобразование Лежандра

$$\Phi = \sigma\varepsilon - U = \Phi(\sigma) \quad (1.50)$$

получим

$$\varepsilon = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} \quad (1.51)$$

Величина Φ называется **дополнительной работой.**

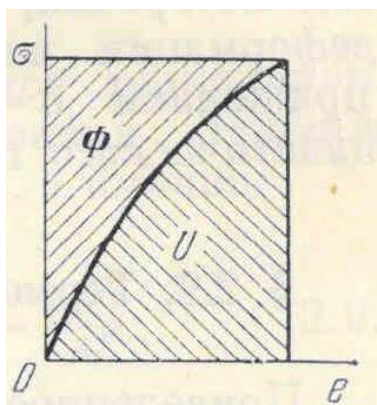


Рис. 1.15: Диаграмма $\sigma \sim \varepsilon$

1.4.3 Закон Гука для трехмерного напряженно-деформированного состояния.

Упругим называется тело, для которого напряжение в каждой точке есть однозначная функция деформации:

$$\sigma_{ij} = \varphi_{ij}(\varepsilon_{ij}) \quad (1.52)$$

Чтобы установить конкретный вид функций φ_{ij} требуются дальнейшие предположения о свойствах материала.

Рассмотрим такой класс упругих материалов, для которых работа, произведенная над элементарным объемом в замкнутом цикле по деформациям или напряжениям, равна нулю. Такие материалы называются "гиперупругими".

Изменение внутренней энергии равно

$$dU = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}.$$

Условие равенства нулю работы на произвольном замкнутом цикле по деформациям записывается в следующем виде:

$$\oint dU = 0. \quad (1.53)$$

Выполнение равенства (1.53) означает, что подынтегральное выражение есть полный дифференциал. Следовательно,

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (1.54)$$

Мы предполагаем, что соотношения (1.54) однозначно разрешимы относительно ε_{ij} . Введем функцию

$$\Phi(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - U(\varepsilon_{ij}). \quad (1.55)$$

Легко проверить, что

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (1.56)$$

Функция $\Phi(\sigma_{ij})$ называется "дополнительной работой".

Требование однозначной разрешимости уравнений (1.54) относительно деформаций эквивалентно условию выпуклости поверхности $U(\varepsilon_{ij}) = \text{const}$ в пространстве деформаций или поверхности $\Phi(\sigma_{ij}) = \text{const}$ в пространстве напряжений.

При малых деформациях, как следует из экспериментальных данных, зависимость между напряжениями и деформациями линейная:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (1.57)$$

и обратно

$$\varepsilon_{kl} = \Pi_{ijkl}\sigma_{kl}. \quad (1.58)$$

Тензор четвертого ранга E_{ijkl} называется тензором модулей упругости, а тензор Π_{ijkl} — тензором упругих податливостей.

Вследствие соотношений (1.54) и (1.56) имеем

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (1.59)$$

Поэтому тензоры E_{ijkl} и Π_{ijkl} симметричны относительно первой и второй пар индексов

$$E_{ijkl} = E_{klij} \quad \Pi_{ijkl} = \Pi_{klij}. \quad (1.60)$$

Из симметрии тензоров напряжения и деформации следует, что тензор модулей упругости и тензор упругих податливостей не меняются при перестановке индексов i и j , и индексов k и l .

Таким образом, из 81 компонент тензора четвертого ранга в трехмерном пространстве различными остаются лишь 21 компонента. Соответствующие потенциалы имеют вид:

$$U = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}, \quad \Phi = \frac{1}{2} \Pi_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad (1.61)$$

Для линейно-упругого тела по теореме Эйлера об однородных функциях имеем

$$\varepsilon_{ij} \sigma_{ij} = \varepsilon_{ij} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2U \quad (1.62)$$

и, следовательно,

$$\Phi = U$$

1.4.4 Закон Гука для изотропного материала

Материал, свойства которого в точке не зависят от направления, называется изотропным. Следовательно, потенциал напряжений и упругая энергия изотропного тела не должны меняться при повороте осей координат. Поэтому потенциал напряжений должен выражаться через инварианты тензора деформаций. Единственная однородная квадратичная форма, составленная из этих инвариантов, зависит от двух констант и представляется следующим образом:

$$U = \frac{1}{2}(\lambda E_I^2 + 2\mu E_{II}). \quad (1.63)$$

Константы λ и μ называются упругими постоянными Ламе. Если в (1.63) подставить выражения для E_I^2 и E_{II} :

$$E_I = \varepsilon_{ii} = \delta_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad E_I^2 = \delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}, \quad E_{II} = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} = \delta_{ik}\delta_{jl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}, \quad (1.64)$$

то получим

$$U = \frac{1}{2}(\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl})\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}. \quad (1.65)$$

Таким образом для изотропного материала

$$E_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl}. \quad (1.66)$$

Если обозначить $E_I = 3\varepsilon = 3(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = \theta$, то из (1.57) и (1.66) получим:

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}. \quad (1.67)$$

Соотношения (1.67) можно разрешить относительно деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \left(\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \delta_{ij} \right), \quad (1.68)$$

где

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = 2(1 + \nu)\mu. \quad (1.69)$$

Упругая постоянная E называется модулем упругости, упругая постоянная ν — коэффициентом Пуассона. Подставляя выражение для σ в (1.68), получим:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})], \dots \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = \frac{1}{\mu}\sigma_{12}, \dots \quad (1.70)$$

Свертывая (1.67) по индексам i и j , получим

$$3\sigma = (3\lambda + 2\mu)\theta. \quad (1.71)$$

Если ввести обозначение

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1 - 2\nu)},$$

то соотношение (1.71) запишется в виде:

$$\sigma = 3K\theta. \quad (1.72)$$

Величина K называется объемным модулем упругости.

Закон Гука можно записать в иной форме, если представить тензоры напряжения и деформации в виде суммы шарового тензора и девиатора:

$$\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = 2\mu(\varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}), \quad \text{или} \quad \bar{\sigma}_{ij} = 2\mu\bar{\varepsilon}_{ij}. \quad (1.73)$$

Соотношения (1.72) и (1.73) определяют закон Гука для изотропного материала.

Для положительной определенности квадратичной формы упругой энергии необходимо и достаточно выполнение условий $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Отсюда следует, что модуль упругости E , объемный модуль упругости K и модуль сдвига $\mu = G$ положительны. Из этих условий следует ограничение на множество возможных значений коэффициента Пуассона:

$$-1 \leq \nu \leq 1/2.$$

1.4.5 Постановка краевых задач в линейной теории упругости.

В линейной теории упругости используются соотношения и уравнения, справедливые в случае бесконечно малых деформаций. Также принимается линейный закон Гука.

В случае малых деформаций лагранжев тензор конечных деформаций можно заменить лагранжевым тензором линейных деформаций (см. (1.29)). Диагональные элементы тензора бесконечно малых деформаций представляют собой относительные удлинения линейных элементов, расположенных до деформации

вдоль осей x_i . Недиagonalные элементы тензора бесконечно малых деформаций представляют собой половину изменения углов между двумя первоначально ортогональными линейными элементами, расположенными вдоль координатных осей. Компоненты тензора бесконечно малых деформаций выражаются через производные от компонент вектора перемещений по формулам (1.32).

Для бесконечно малых деформаций различия между эйлеровыми и лагранжевыми координатами нет.

Отметим, что уравнения движения (1.35) получены в эйлеровой системе координат. В лагранжевой системе координат вид этих уравнений иной [1]. Но, как уже отмечено, при бесконечно малых деформациях различия между эйлеровыми и лагранжевыми координатами нет. Поэтому в этом случае вид уравнений движения и равновесия один и тот же в обеих системах координат.

Полная система уравнений теории упругости включает следующие уравнения.

Уравнения равновесия:

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0; \quad (1.74)$$

соотношения закона упругости: в общем случае:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial e_{ij}}; \quad (1.75)$$

для линейно-упругого тела:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} e_{kl}; \quad (1.76)$$

выражения компонент тензора деформаций через компоненты вектора перемещения вычисляются по формулам:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.77)$$

Уравнения (1.74)- (1.74) должны выполняться в каждой точке области V , ограниченной поверхностью S . На границе области S должны быть поставлены краевые условия. Пусть поверхность тела S состоит из двух частей: $S = S_T + S_u$. Будем считать, что заданы следующие *краевые условия:*

$$u_i = u_i^*, \quad x_i \in S_u \quad (1.78)$$

$$\sigma_{ij} n_j = T_i^*, \quad x_i \in S_T \quad (1.79)$$

Краевые условия могут быть поставлены и в более общей форме. Краевые условия в линейной теории упругости ставятся на поверхности недеформированного тела.

Задача математической теории упругости состоит в решении уравнений (1.74) - (1.77) с граничными условиями (1.78) - (1.79). В такой формулировке — это смешанная краевая задача.

Если $S = S_u$, то краевая задача называется первой краевой задачей, если $S = S_T$ — второй краевой задачей.

Несложно доказать [3], что *если решение смешанной краевой задачи существует, то оно единственно.*

Уравнения теории упругости в перемещениях (уравнения Ламе)

Уравнения (1.74) - (1.77) можно свести к системе трех уравнений относительно трех компонент вектора перемещений [3]:

$$(\lambda + \mu)\theta_{,i} + \mu\Delta u_i + \rho F_i = 0 \quad (1.80)$$

В случае отсутствия массовых сил Функция θ гармонической

$$\Delta\theta = 0, \quad (1.81)$$

а компоненты вектора перемещения u_i — бигармонические функции:

$$\Delta\Delta u_i = 0 \quad (1.82)$$

Уравнения теории упругости в напряжениях (уравнения Бельтрами)

Уравнения (1.74) - (1.77) можно свести к системе шести уравнений относительно шести независимых компонент тензора напряжений. В случае отсутствия массовых сил эти уравнения имеют следующий вид [3]:

$$\Delta\sigma_{ij} + \frac{3}{1+\nu}\sigma_{,ij} = 0 \quad (1.83)$$

Среднее напряжение σ является гармонической функцией:

$$\Delta\sigma = 0 \quad (1.84)$$

Компоненты тензора напряжений — бигармонические функции:

$$\Delta\Delta\sigma_{ij} = 0 \quad (1.85)$$

1.5 Вариационные принципы в линейной теории упругости

1.5.1 Вариационный принцип Лагранжа

Мы рассмотрим здесь два вариационных принципа, которые широко применяются как при решении задач линейной теории упругости, так и при формулировке краевых задач. Формулировка этих принципов содержится в монографии [3].

Рассмотрим функционал Лагранжа

$$J_u = \int_V [-U(e_{ij}) + \rho F_i u_i] dV + \int_{S_u} T_i^* u_i dS \quad (1.86)$$

В функционале (1.86) предполагается, что деформации e_{ij} выражены через компоненты вектора перемещения по соотношениям Коши

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

Считаем, что компоненты вектора перемещения удовлетворяют краевым условиям на S_u

$$u_i = u_i^*, \quad x_i \in S_u$$

Вычислим первую вариацию функционала (1.86)

$$\delta J_u = \int_V \left[-\frac{\partial U}{\partial e_{ij}} \delta e_{ij} + \rho F_i \delta u_i \right] dV + \int_{S_T} T_i^* \delta u_i dS = 0 \quad (1.87)$$

Введем обозначение

$$\frac{\partial U}{\partial e_{ij}} = \sigma_{ij}$$

Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial e_{ij}} \delta e_{ij} = \sigma_{ij} \delta e_{ij} = \sigma_{ij} \delta u_{i,j}$$

С учетом последнего равенства первую вариацию функционала Лагранжа можно записать в виде

$$\delta J_u = \int_V (\sigma_{i,j,j} + \rho F_i) \delta u_i dV - \int_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS + \int_{S_T} T_i^* \delta u_i dS$$

При записи последнего выражения использована формула Гауса - Остроградского. Второй интеграл равен нулю на части поверхности S_u так как $\delta u_i = 0$ на S_u . Следовательно, первую вариацию функционала Лагранжа можно записать в виде

$$\delta J_u = \int_V (\sigma_{ij,j} + \rho F_i) \delta u_i dV + \int_{S_T} (T_i^* - \sigma_{ij} n_j) \delta u_i dS$$

Таким образом, уравнениями Эйлера функционала Лагранжа являются уравнения

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0 \quad x_i \in V$$

$$\sigma_{ij} n_j = T_i^*, \quad x_i \in S_T$$

т. е. уравнения равновесия и граничные условия на части поверхности S_T .

Вычислим вторую вариацию функционала Лагранжа

$$\delta^2 J_u = -\frac{1}{2} \int_V \frac{\partial^2 U}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} \delta e_{ij} \delta e_{kl} dV$$

В силу выпуклости функции $U(e_{ij})$ вторая вариация функционала Лагранжа положительна. Следовательно, на **решении** линейной задачи теории упругости он достигает максимума.

1.5.2 Вариационный принцип Кастильяно

При формулировке принципа Кастильяно предполагается, что соотношения

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial e_{ij}} \quad (1.88)$$

можно разрешить относительно компонент тензора деформаций e_{ij} . Для этого достаточно выполнения условия

$$\frac{\partial^2 U}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} e_{ij} e_{kl} \geq 0. \quad (1.89)$$

Условие (1.89) обеспечивает выпуклость функции $U(e_{ij})$. Введем функцию

$$\Phi(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij} e_{ij} - U(e_{ij}).$$

В правой части этого равенства предполагается, что компоненты тензора деформаций e_{ij} выражены через компоненты тензора напряжений σ_{ij} из соотношений (1.88).

Рассмотрим функционал

$$J_\sigma = \int_V \Phi(\sigma_{ij}) dV - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j u_i^* dS. \quad (1.90)$$

Этот функционал называется функционалом Кастильяно. Будем искать экстремум функционала Кастильяно на множестве функций, удовлетворяющих уравнениям равновесия внутри области V и краевым условиям в напряжениях, заданных на части поверхности S_T :

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0, \quad \mathbf{x} \in V \quad \text{и} \quad \sigma_{ij} n_j = T_i^*, \quad \mathbf{x} \in S_T. \quad (1.91)$$

Следовательно, допустимые напряжения удовлетворяют условиям:

$$\delta\sigma_{ij,j} = 0, \quad \mathbf{x} \in V \quad \text{и} \quad \delta\sigma_{ij} n_j = 0, \quad \mathbf{x} \in S_T. \quad (1.92)$$

Покажем, что условие $\delta J_\sigma = 0$ влечет за собой выполнение условий совместности для деформаций, которые пока что определим равенствами:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}$$

Введем дополнительный функционал K_σ , воспользовавшись методом неопределенных множителей Лагранжа:

$$K_\sigma = \int_V [\Phi(\sigma_{ij}) - \lambda_i(\sigma_{ij,j} + \rho F_i)] dV - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j u_i^* dS - \int_{S_T} \mu_i(\sigma_{ij} n_j - T_i^*) dS \quad (1.93)$$

Теперь можно искать безусловный экстремум функционала K_σ .

Приравняем к нулю первую вариацию этого функционала

$$\delta K_\sigma = \int_V \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \delta\sigma_{ij} - \lambda_i \delta(\sigma_{ij,j}) \right) dV - \int_{S_u} \delta\sigma_{ij} n_j u_i^* dS - \int_{S_T} \mu_i \delta\sigma_{ij} n_j dS = 0 \quad (1.94)$$

Используя в интеграле по объему формулу Гаусса-Остроградского и учитывая условия (1.92), получим

$$\begin{aligned} \delta K_\sigma = & \int_V \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} - \lambda_{i,j} \right) \delta \sigma_{ij} dV + \int_{S_u} \delta \sigma_{ij} n_j (\lambda_i - u_i^*) dS + \\ & + \int_{S_T} \delta \sigma_{ij} n_j (\lambda_i - \mu_i) dS = 0 \end{aligned} \quad (1.95)$$

Так как вариации σ_{ij} произвольны, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = e_{ij} = \frac{1}{2} (\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}), \quad x_i \in V \quad \text{и} \quad \lambda_i = u_i^*, \quad x_i \in S_u, \\ \lambda_i = \mu_i, \quad x_i \in S_T \end{aligned} \quad (1.96)$$

Введенные величины e_{ij} выражаются через λ_i точно так же, как компоненты тензора деформации выражаются через компоненты вектора перемещения u_i .

Множитель Лагранжа, вектор λ_i , представляет собой в действительности вектор перемещения

$$\lambda_i \equiv u_i.$$

Функционал Кастильяно для истинного напряженного состояния принимает минимальное значение [3]:

$$J_\sigma(\sigma_{ij}) < J_\sigma(\sigma'_{ij}).$$

Глава 2

Основы теории пластичности

2.1 Диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$ одноосного растяжения

Определяющие соотношения (зависимость между напряжениями и деформациями) строятся на основе экспериментальных данных о свойствах материала.

Одной из основных характеристик свойств твердых деформируемых тел является диаграмма одноосного растяжения/сжатия. Для получения такой диаграммы используются круглые или плоские образцы.

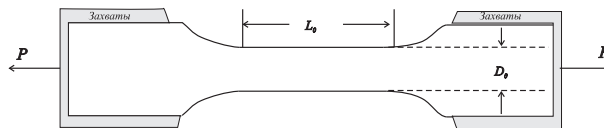


Рис. 2.1: Образец для испытаний на одноосное растяжение/сжатие.

На рисунке 2.1 показан такой образец. Торцы образца помещаются в захваты, к которым прикладывается растягивающая/сжимающая сила P . На некотором удалении от захватов напряжения и деформации с достаточной точностью распределены равномерно по сечению образца. Та часть образца, на которой напряжения и деформации распределены равномерно по сечению образца, называется рабочей частью. Длина рабочей части на рисунке 2.1 обозначена через L_0 , D_0 — диаметр круглого образца.

Учитывая равномерное распределение напряжений и деформаций по поперечному сечению рабочей части образца, можно определить напряжения и деформации следующим образом

$$\sigma = \frac{P}{F_0}, \quad \varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (2.1)$$

где F_0 — площадь поперечного сечения, Δl — удлинение/укорочение рабочей части образца. Измеряя в эксперименте силу P и величину Δl , можно построить диаграмму одноосного растяжения/сжатия $\sigma \sim \varepsilon$.

На рис. 2.2 приведены диаграммы растяжения мягкой стали и меди при комнатной температуре [4]. Как видно, характер этих кривых совершенно различный. На диаграмме растяжения мягкой стали точка A соответствует так называемому пределу пропорциональности и лежит несколько ниже точки B — предела упругости, после которого появляются остаточные деформации и удлинения быстро увеличиваются. После точки B имеется "площадка текучести" BC . За точкой C напряжения вновь возрастают. Участок CD соответствует состоянию упрочнения материала.

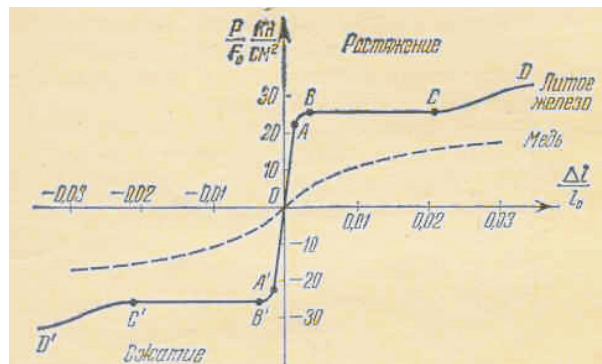


Рис. 2.2: Диаграммы одноосного растяжения мягкой стали и меди при комнатной температуре.

Если после некоторого достигнутого значения нагрузки P ее уменьшать, то кривая разгрузки ABC , близка к прямой линии (рис. 2.3).

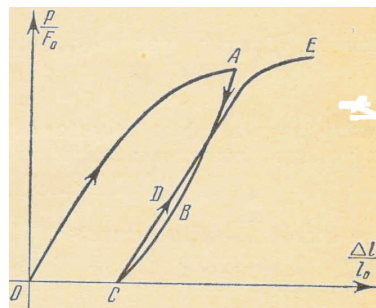


Рис. 2.3: Диаграмма одноосного деформирования при нагружении, разгрузке и повторном нагружении.

Для большинства конструкционных материалов на кривой $\sigma \sim \varepsilon$ можно отметить несколько характерных точек (рис. 2.4,а), соответствующих различным уровням напряжений. *Предел пропорциональности* — такой уровень напряжения, что при напряжениях, меньших этого значения, зависимость напряжения от деформации линейная $\sigma = E\varepsilon$, где E — коэффициент пропорциональности, называемый модулем упругости, или модулем Юнга. *Предел упругости* — такой уровень напряжения, что при напряжениях, меньших этого значения, не возникает остаточных напряжений (деформации полностью обратимы). Для многих конструкционных материалов эти два значения различаются незначительно.

Одной из важных характеристик материала является *предел текучести*. *Предел текучести* — такое значение напряжения, при значениях выше которого появляются остаточные деформации (а именно, при снятии нагрузки в образце остаются не равные нулю деформации). На рисунке 2.4,а пределу текучести соответствует точка А. Значение этого напряжения существенно зависит от точности аппаратуры, с помощью которой производятся измерения. Часто предел текучести определяется следующим образом. Строится диаграмма $\sigma \sim \varepsilon$, затем проводится прямая, параллельная упругому участку диаграммы и отстоящая по оси ε от начала координат на некоторую величину, например, равную 0.002, что соответствует 0.2% деформации. Точка пересечения этой прямой с кривой $\sigma \sim \varepsilon$ и определяет предел текучести, который обозначен как $\sigma_{ys0.2\%}$.

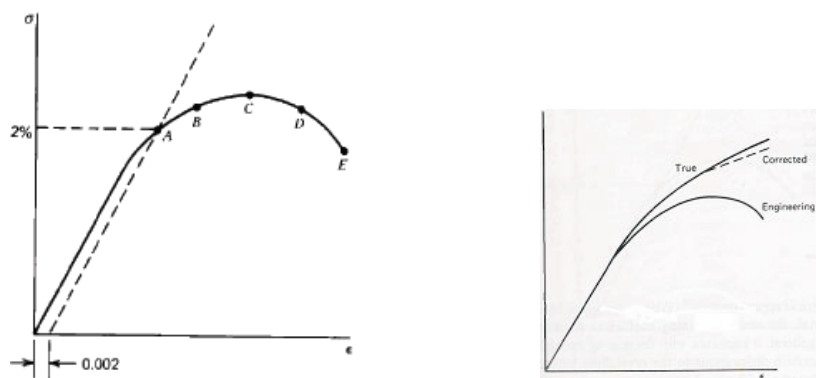


Рис. 2.4: Кривые одноосного растяжения: а) характерные точки на кривой $\sigma \sim \varepsilon$, б) "инженерная" $\sigma \sim \varepsilon$ - диаграмма и "истинная" $\sigma_{ист} \sim \varepsilon_{ист}$ - диаграмма.

Значение предела текучести в зависимости от материала изменяется в очень широких пределах. Так для различных марок стали предел текучести изменя-

ется в пределах от 300 Мпа до 1000 Мра. Для отожженной меди предел текучести равен примерно 70 Мпа.

Точка C соответствует напряжению, которое называется *временным сопротивлением*. На участке AC происходит упрочнение материала. Для ряда материалов участку упрочнения предшествует площадка текучести (диаграмма одноосного растяжения железа на рис. 2.2).

Участок CD соответствует интенсивному изменению длины рабочей части и диаметра образца. При этом остаточные (пластические деформации) локализуются в середине рабочей части образца (происходит образование "шейки—резкое уменьшение диаметра поперечного сечения в середине рабочей части). Точка E соответствует разрушению образца.

Введенные в (2.1) напряжение σ и деформация ε называются инженерными, а приведенные выше диаграммы инженерными диаграммами одноосного растяжения. При определении напряжения в (2.1) приложенная сила P относится к площади недеформированного образца, а при определении деформации удлинение Δl относится к исходной длине рабочей части. На самом деле и площадь поперечного сечения и длина рабочей части образца изменяются при увеличении нагрузки. Причем, чем выше нагрузка, тем сильнее эти изменения.

При обработке экспериментальных данных используются и так называемые истинные напряжения и деформации:

$$\sigma_{\text{ист}} = \frac{P}{F}, \quad \varepsilon_{\text{ист}} = \ln \frac{l}{l_0}, \quad (2.2)$$

где F — текущая площадь поперечного сечения образца, l — текущая длина рабочей части образца. Диаграмма одноосного напряжения $\sigma_{\text{ист}} \sim \varepsilon_{\text{ист}}$ приведена на рисунке 2.4,б. Как видно, на этой диаграмме отсутствует участок разупрочнения.

Эксперименты на сложное нагружение.

При экспериментальном изучении поведения материалов при сложном напряженном состоянии используются образцы в виде тонкостенных трубок (Рис. 2.5). При одновременном нагружении тонкостенного трубчатого образца продольным усилием P , крутящим моментом M и внутренним давлением p в его стенке можно вызвать напряженное состояние незначительно отличающееся плоского напряженного состояния. Это различие тем меньше, чем меньше от-

ношение h/a , где h — толщина трубки, a — ее средний радиус.

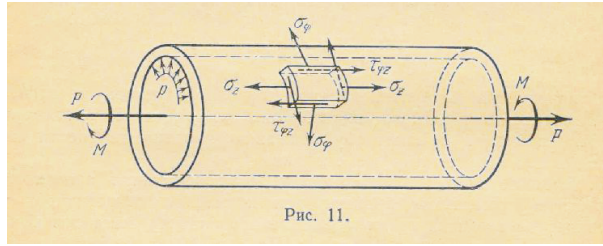


Рис. 2.5:

При действии осевого усилия P и скручивающего момента M напряжения будут следующими:

$$\sigma_\varphi \simeq 0, \quad \sigma_z = \frac{P}{2\pi ah}, \quad \tau_{\varphi z} = \frac{M}{2\pi a^2 h}.$$

При действии осевого усилия P и внутреннего давления p напряжения будут следующими:

$$\sigma_\varphi \simeq p \frac{a}{h}, \quad \sigma_z = \frac{P}{2\pi ah}, \quad \tau_{\varphi z} \simeq 0.$$

Напряжение σ_r , имеющее порядок p , пренебрежимо мало по сравнению с напряжениями σ_φ, σ_z , так как $a/h \gg 1$.

Измеряя деформации в стенке трубы по изменениям диаметра, длины трубы и угла закручивания, можно построить кривые деформирования при сложном напряженном состоянии. В частности, если нагружать трубку только крутящим моментом M , то в ней создается напряженное состояние, близкое к чистому сдвигу. Проводя такой эксперимент, можно получить диаграмму "чистого" сдвига $\tau \sim \gamma$. Предел текучести при чистом сдвиге, вообще говоря, отличается от предела текучести при растяжении.

Различают *простое* и *сложное* нагружения. При простом нагружении компоненты тензора напряжения возрастают пропорционально одному параметру. В этом случае, например в экспериментах с тонкостенными образцами, и внешние нагрузки должны возрастать пропорционально тому же параметру. Таким образом, при простом нагружении форма тензора напряжения и его главные направления не меняются.

При сложном нагружении направления главных осей и взаимоотношения главных напряжений могут изменяться.

2.2 Упрочнение и разупрочнение. Поверхность нагружения

Как мы видели, при одноосном растяжении образца существует такое значение напряжения (предел текучести), что при напряжениях выше этого значения в образце возникают остаточные (пластические деформации).

При исследовании трехмерного напряженного состояния также необходимо знать, какие условия характеризуют переход материала из упругого состояния в пластическое.

Введем шестимерное пространство напряжений Π , декартовыми координатами которого являются компоненты симметричного тензора напряжений σ_{ij} . Каждому тензору σ_{ij} соответствует некоторая точка или вектор σ с началом в начале координат и компонентами σ_{ij} . В пространстве Π рассмотрим область Q (рис. 2.6), содержащую начало координат, в которой упругопластический материал будем считать упругим, а именно, для любых точек, принадлежащих Q , приращения напряжений связаны с приращениями деформаций законом Гука. Пусть Σ — поверхность, ограничивающая область Q . Точки поверхности Σ соответствуют пределу упругости или пластичности. Поверхность Σ для упрочняющегося материала называется поверхностью *нагружения* [4], [5]. Точку на поверхности Σ , принадлежащую вектору действительного напряженного состояния, будем называть *точкой нагружения*.

При деформировании материала поверхность нагружения, вообще говоря, изменяется. При этом в одних направлениях происходит *упрочнение* материала, а в других — *разупрочнение*. Пусть данному напряженному состоянию σ соответствует некоторая поверхность нагружения Σ (рис. 2.6).

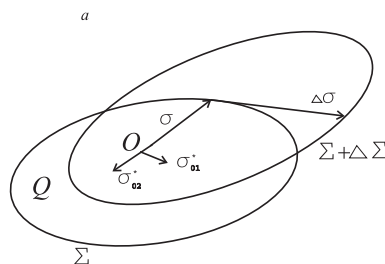


Рис. 2.6: Упрочнение и разупрочнение материала при пластическом деформировании.

Пусть σ^* — вектор напряжений, соответствующий любой точке данной поверхности нагружения или внутренней точке области Q . Обозначим через σ_0^*

единичный вектор, соответствующий вектору σ^* . Будем говорить, что данное приращение напряжений $\Delta\sigma$ вызывает упрочнение в некотором направлении, определяемом вектором σ_0^* если в этом направлении предел пластичности повышается. И материал разупрочняется, если в данном направлении предел пластичности понижается. На рисунке 2.6 поверхность Σ в результате приращения напряжений перешла в поверхность $\Sigma + \Delta\Sigma$. В направлении вектора σ_{01}^* материал упрочнился, а в направлении σ_{02}^* — разупрочнился.

Термин *упрочняющееся пластическое тело* используется для определения сред, поверхность нагружения которых изменяется при деформировании элемента тела.

Предположим, что существует конечная система параметров и констант материала, определяющая состояние элемента упрочняющейся пластической среды

$$\sigma_{ij}, T, \varepsilon_{ij}^p, \chi_i, k_i, \quad (2.3)$$

где T — температура, ε_{ij}^p — компоненты тензора пластической деформации, χ_i — параметры упрочнения, k_i — константы материала. Для изотермического процесса деформирования $T = \text{const}$, $dT = 0$. Поэтому для таких процессов температуру T можно не включать в число определяющих параметров, считая что она входит в число констант k_i .

Предположим, что уравнение поверхности нагружения можно записать в виде

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_i, k_i) = 0. \quad (2.4)$$

Функция f называется *функцией нагружения*.

Точки поверхности нагружения, в окрестности которых функция нагружения дифференцируема по σ_{ij} и, следовательно, в этих точках имеется единственная нормаль к поверхности Σ , называются *регулярными*. Поверхность нагружения в окрестности регулярных точек является гладкой.

Упругой области соответствуют отрицательные значения функции нагружения:

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_i, k_i) < 0. \quad (2.5)$$

Введем понятия разгрузки, нейтрального нагружения и нагружения для регулярных точек.

Если напряженное состояние принадлежит поверхности Σ и приращения напряжений $\Delta\sigma$ переводят вектор σ внутрь области Q , то этот процесс назовем *разгрузкой*. В этом случае приращения напряжений связаны с приращениями

деформаций законом Гука и изменения пластических деформаций не происходит. Поверхность при разгрузке не изменяется (рис. 2.7, а).

При разгрузке приращения пластических деформаций и параметров упрочнения равны нулю:

$$d\varepsilon_{ij}^p = 0, \quad d\chi_i = 0.$$

Согласно (2.4), (2.5) при разгрузке

$$d'f \equiv \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0. \quad (2.6)$$

Здесь индекс ' после дифференциала означает, что дифференциал вычисляется только по приращениям σ_{ij} .

Нейтральное нагружение имеет место в том случае, когда приращение напряжений таковы, что конец вектора σ в любой момент времени остается на фиксированной поверхности нагружения Σ и изменения пластических деформаций не происходит. При нейтральном нагружении напряженное состояние находится на пределе упругости, изменения поверхности не происходит. В этом случае приращения напряжений и деформаций для упругопластического материала связаны законом Гука, приращения пластических деформаций и параметров упрочнения не происходит. Согласно (2.4) при нейтральном нагружении

$$d'f \equiv \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0. \quad (2.7)$$

Если приращение напряжений сопровождается приращениями пластических деформаций, то такой процесс называется *нагружением*. Для нагружения необходимо, чтобы исходное напряженное состояние соответствовало пределу упругости. Процесс нагружения сопровождается изменением поверхности нагружения Σ (рис. 2.7, б).

При нагружении $d\varepsilon_{ij}^p \neq 0$, $d\chi_i \neq 0$. Причем,

$$d'f = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0.$$

Это означает, что исключается возможность передвижения поверхности нагружения внутрь ее первоначального положения в точке нагружения. Но точки поверхности нагружения $\Sigma + \Delta\Sigma$, лежащие вне окрестности точки нагруже-

ния, при нагружении могут смещаться внутрь области \mathbf{Q} , ограниченной первоначальной поверхностью Σ (рис. 2.7, б). Согласно (2.4) при нагружении

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial \chi_i} d\chi_i = 0. \quad (2.8)$$

Выше речь шла о регулярных точках поверхности нагружения. Но поверхность нагружения может иметь особенности в виде ребер, конических или угловых точек. Соотношения (2.4)–(2.8) можно распространить и на такие поверхности нагружения [5].

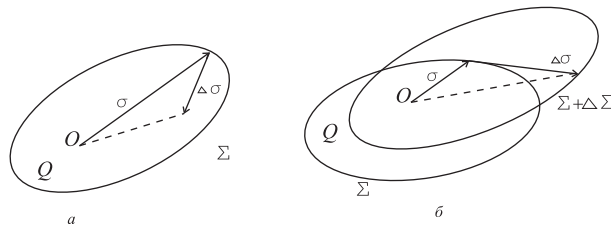


Рис. 2.7: Смещение поверхности нагружения в процессе деформирования: а) при разгрузке, б) при нагружении.

2.3 Принцип максимума. Ассоциированный закон деформирования

Процесс нагружения сопровождается приращением пластических деформаций. В этом случае необходимо построить соотношения между приращениями напряжений и приращениями деформаций. Предполагается, что приращения деформаций можно представить как сумму приращений упругих деформаций $d\epsilon_{ij}^e$ и приращений пластических деформаций $d\epsilon_{ij}^p$:

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p.$$

Одним из основных принципов, который используется при построении соотношений между приращениями напряжений и приращениями пластических деформаций, является принцип максимума скорости диссипации механической работы.

Обозначим через D скорость диссипации механической работы на приращениях пластических деформаций:

$$D = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p, \quad d\epsilon_{ij}^p = \frac{d\epsilon_{ij}^p}{dt}.$$

Принцип максимума скорости диссипации механической работы формулируется следующим образом [5]:

*при фиксированных параметрах ϵ_{ij}, χ_i скорость диссипации механической работы в единице объема при пластическом деформировании имеет максимальное значение для **действительного** напряженного состояния среди всех напряженных состояний, допускаемых данной функцией напряжения:*

$$f(\sigma_{ij}^*, \epsilon_{ij}^p, \chi_i, k_i) \leq 0. \quad (2.9)$$

Выше приведенная формулировка эквивалентна следующей:

при фиксированных параметрах ϵ_{ij}, χ_i для любого данного значения компонент скорости деформации e_{ij}^p имеет место неравенство

$$\sigma_{ij} e_{ij}^p > \sigma_{ij}^* e_{ij}^p, \quad (2.10)$$

где σ_{ij} — действительные значения компонент напряжений, соответствующие данному значению e_{ij}^p ; σ_{ij}^ — компоненты любого возможного напряженного состояния, допускаемого данной функцией напряжения*

$$f(\sigma_{ij}^*, \epsilon_{ij}^p, \chi_i, k_i) \leq 0.$$

В формулировке ослабленного принципа максимума требуется выполнения нестрогого неравенства

$$\sigma_{ij}e_{ij}^p \geq \sigma_{ij}^*e_{ij}^p, \quad (2.11)$$

В векторной форме неравенства (2.10), (2.11) можно переписать в следующем виде:

$$\boldsymbol{\sigma}e^p > \boldsymbol{\sigma}^*e^p, \quad \boldsymbol{\sigma}e^p \geq \boldsymbol{\sigma}^*e^p. \quad (2.12)$$

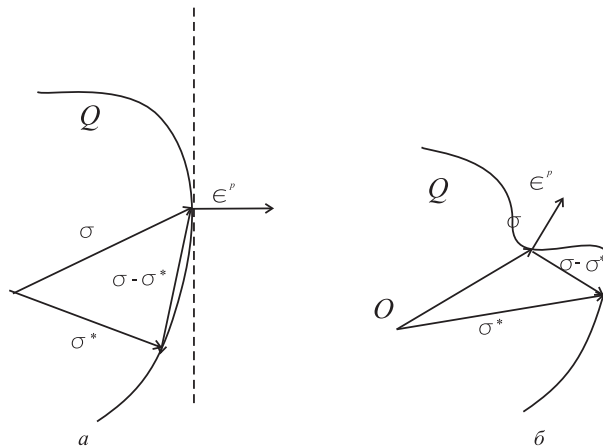


Рис. 2.8: К принципу максимума: а) поверхность нагружения выпуклая по отношению к области Q , б) поверхность нагружения выпуклая по отношению к области Q .

Предположим, что функция нагружения является гладкой, следовательно, в каждой ее точке существует единственная нормаль и касательная плоскость.

Из (2.12) следует, что

$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)e^p > 0, \quad (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)e^p \geq 0, \quad (2.13)$$

т. е. вектор $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*$ при любом возможном векторе $\boldsymbol{\sigma}^*$ образует нетупой угол с вектором e^p . Из неравенств (2.13) следует, что вектор e^p должен быть направлен по нормали к поверхности нагружения, сама поверхность Σ должна быть выпуклой по отношению к области Q в случае выполнения первого неравенства в (2.13) и невогнутой — в случае выполнения второго неравенства в (2.13) (рис. 2.8, а). В противном случае неравенства (2.13) не имеют места (рис. 2.8, б). Таким образом, следствием принципа максимума являются соотношения:

$$e_{ij}^p = \mu^0 \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (2.14)$$

или

$$de_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda = \mu^0 dt, \quad (2.15)$$

причем,

$$de_{ij}^p = \begin{cases} d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} & \text{при } f = 0, \quad \text{и } d'f \equiv \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} d\sigma_{mn} > 0, \\ 0 & \text{при } f < 0 \quad \text{или при } f = 0, \quad d'f \leq 0 \end{cases}$$

Соотношения (2.14), (2.15) называются *ассоциированным законом течения* или деформирования. Термин "течение" связан с тем, что в уравнения (2.14), (2.15) входят компоненты скорости пластической деформации e_{ij}^p .

Следует заметить, соотношения теории пластического течения однородны относительно дифференциала времени dt .

Соотношения данного параграфа можно обобщить на случай кусочно гладких поверхностей нагружения [5].

2.4 Поверхности текучести для изотропного материала

Для изотропного материала функция нагружения должна быть симметрической функцией главных напряжений

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \text{const} = K,$$

где K — константа материала, связанная с пределом текучести. Поскольку основными симметрическими функциями компонент тензора напряжений являются его инварианты, то последнее соотношение можно записать в следующем виде:

$$f(\sigma, I_2(T_\sigma), I_2(T_\sigma)) = K.$$

Для большинства материалов в достаточно большом диапазоне давлений влияние среднего давления на процесс пластического течения пренебрежимо мало. Если пренебречь влиянием среднего давления, то условие текучести можно записать в виде:

$$f(I_2(T_\sigma), I_2(T_\sigma)) = K. \quad (2.16)$$

Если пренебрегается влиянием среднего давления на пластическое деформирование, то фактически, как это следует (2.16), функция текучести фактически зависит только от разностей главных напряжений. В пространстве напряжений уравнение (2.16) — уравнение цилиндра, осью которого является прямая

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, перпендикулярная девиаторной плоскости. Поэтому достаточно рассмотреть след этого цилиндра на девиаторной плоскости. Это будет кривая симметричная относительно осей $1', 2', 3'$. Эта кривая называется *кривой текучести*.

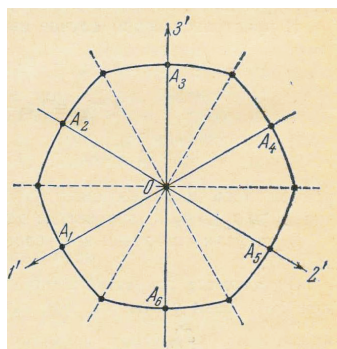


Рис. 2.9:

Для изотропного материала, свойства которого одинаковы при растяжении и сжатии, кривая текучести обладает дополнительно следующими свойствами:

- кривая текучести не проходит через начало координат,
- кривая текучести симметрична относительно осей $1', 2', 3'$,
- кривая текучести симметрична относительно прямых, перпендикулярных к осям $1', 2', 3'$,
- кривая текучести должна быть выпуклой.

Кривая текучести, удовлетворяющая всем выше перечисленным свойствам показана на рисунке 2.9.

Конкретная кривая текучести строится с использованием экспериментальных данных.

2.4.1 Условие текучести Треска — Сен-Венана.

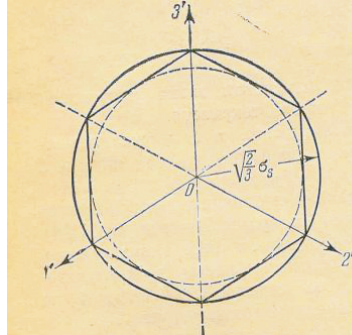


Рис. 2.10: Кривые текучести Треска — Сен-Венана и Мизеса

Французский инженер Треска на основе результатов многочисленных экспериментов по истечению материала через отверстия высказал следующее предположение:

в состоянии текучести во всех точках среды максимальное касательное напряжение имеет одно и то же значение для данного материала.

Математически это условие записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} 2|\tau_1| &= |\sigma_2 - \sigma_3| \leq \sigma_s, \\ 2|\tau_2| &= |\sigma_3 - \sigma_1| \leq \sigma_s, \\ 2|\tau_3| &= |\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_s, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где σ_s — предел текучести при одноосном растяжении.

Условия (2.4.1) определяют в пространстве главных напряжений правильную шестигранную призму с осью $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, перпендикулярной к девиаторной плоскости. Соответствующая кривая текучести на девиаторной плоскости является правильным шестиугольником (рис. 2.10).

Упомянутые плоскости отсекают на осях $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ отрезки длины σ_s . Так как $\cos(\sigma_3, 3') = \sqrt{2/3}$, то радиус круга, описанного вокруг шестиугольника равен $\sqrt{2/3}\sigma_s$.

При чистом сдвиге $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$. Следовательно, соотношение между пределом текучести на растяжение и пределом текучести на сжатие по критерию Треска — Сен-Венана следующее:

$$\sigma_s = 2\tau_s. \quad (2.18)$$

Так как максимальное касательное напряжение равно полуразности наибольшего и наименьшего главных напряжений, то *промежуточное главное напряжение не влияет на состояние текучести*. Экспериментальные данные также свидетельствуют о незначительном влиянии промежуточного главного напряжения на состояние текучести.

2.4.2 Условие текучести Мизеса.

Условие текучести Треска — Сен-Венана является кусочно гладким и представляет некоторые трудности при решении конкретных задач.

Мизес заменил шестигранную призму описанным круговым цилиндром

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2 \quad (2.19)$$

или

$$T = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}. \quad (2.20)$$

Так как и случае чистого сдвига $T = \tau$, то из (2.20) получаем следующее соотношение между пределом текучести на растяжение и пределом текучести при чистом сдвиге:

$$\tau_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}. \quad (2.21)$$

Условие Мизеса выполняется в состоянии текучести для поликристаллических материалов несколько лучше, чем условие Треска — Сен-Венана. В то время как для ряда других материалов условие Треска — Сен-Венана лучше соответствует экспериментальным данным.

Левая часть уравнения (2.19) с точностью до постоянного множителя соответствует энергии упругого формоизменения. Таким образом, условие Мизеса можно сформулировать следующим образом: состояние текучести наступает тогда, когда энергия упругого формоизменения достигает некоторого критического значения.

Ранее было показано, что величины T и τ_{\max} различаются незначительно. Если в качестве кривой текучести взять окружность, лежащую посередине между описанной и вписанной окружностями (рис. 2.10), то получим $T \approx 1,08\tau_{\max}$.

2.5 Теория пластического течения для изотропного материала

Приведем основные соотношения теории пластического течения для изотропного материала [4].

Исходные положения теории течения следующие.

1) Материал изотропный.

2) Относительное изменение объёма мало и является упругой деформацией, пропорциональной среднему давлению

$$\varepsilon = 3k\sigma, \quad \text{или} \quad d\varepsilon = 3kd\sigma.$$

3) Полные приращения компонент тензора деформаций есть сумма *упругих* приращений компонент тензора деформаций и *пластических* приращений компонент тензора деформаций

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p,$$

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} \left(d\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} \delta_{ij} d\sigma \right)$$

4) Девиатор напряжения и девиатор приращений пластической деформации пропорциональны

$$D_{d\varepsilon}^p = d\lambda D_\sigma,$$

где $d\lambda$ — скалярный множитель.

Так как $d\varepsilon^p = 0$, то условие 4) записывается в виде

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda s_{ij}$$

Вычислим приращение работы напряжений на приращениях пластических деформаций

$$dA_p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \sigma_{ij} s_{ij} = 2d\lambda T^2.$$

Приращение работы напряжений на приращениях полных деформаций равно:

$$dA = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} (d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p) = dA_e + dA_p,$$

где

$$dA_e = d\Pi, \quad \Pi = \frac{3}{2}k\sigma^2 + \frac{1}{2G}T^2.$$

2.5.1 Состояние текучести.

Уравнения Прандтля — Рейса

В качестве дополнительного соотношения возьмем условие текучести Мизеса

$$T = \tau_s.$$

Тогда

$$d\lambda = \frac{dA_p}{2\tau_s^2} = \frac{\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p}{2\tau_s^2}$$

Теория пластичности Сен-Венана — Мизеса

Уравнения теории пластичности Сен-Венана — Мизеса получаются из уравнений Прандтля — Рейса, если в них пренебречь упругими деформациями.

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda s_{ij}.$$

Эти соотношения можно записать в виде

$$\xi_{ij} = \lambda' s_{ij},$$

где

$$\lambda' = \frac{1}{2\tau_s^2} \frac{dA_p}{dt} = \frac{1}{2\tau_s^2} \sigma_{ij} \xi_{ij} = \frac{1}{2\tau_s^2} s_{ij} \xi_{ij}$$

или

$$\lambda' = \frac{H}{2\tau_s}.$$

Таким образом, соотношения Сен-Венана — Мизеса можно записать в следующем виде:

$$\frac{\xi_{ij}}{H} = \frac{s_{ij}}{2\tau_s}.$$

2.5.2 Состояние упрочнения

Возьмем в качестве дополнительного соотношения условие изотропного упрочнения

$$dA_p = \Phi'(T)dt.$$

Для dA_p было получено выражение

$$dA_p = 2d\lambda T^2.$$

Если ввести обозначение

$$\frac{\Phi'(T)}{2T^2} = F(T),$$

то для величины $d\lambda$ получим выражение

$$d\lambda = F(T)dT.$$

Таким образом

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + F(T)dT s_{ij}.$$

Эти соотношения справедливы при $dT \geq 0$.

Глава 3

Модель жесткопластического тела

Теории пластичности идеализируют сложное поведение реальных материалов при пластическом деформировании. Причем, для различных материалов и различных областей их применения используются гипотезы, определяющие различные модели пластических тел.

Простейшей моделью пластического тела является модель идеального, изотропного, несжимаемого жесткопластического тела. Эта модель используется для описания поведения материалов, диаграмма одноосного напряжения которых имеет площадку текучести. Для таких материалов при достижении предела текучести, развиваются пластические деформации намного большие упругих.

В модели идеального жесткопластического тела реальная диаграмма одноосного растяжения заменяется идеализированной, состоящей из двух прямых. При $\sigma < \sigma_T$ деформации равны нулю, при $\sigma = \sigma_T$ наступает неограниченное пластическое течение (рис. 3.1).

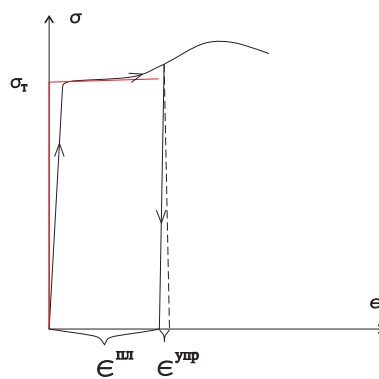


Рис. 3.1: Диаграмма одноосного растяжения и ее идеализация

Прежде, чем перейти к описанию модели идеального жесткопластического тела, введем несколько определений [6].

3.1 Пространство напряжений

Напряженное состояние в точке представляется симметричным тензором второго ранга $\boldsymbol{\sigma}$ с компонентами σ_{ij} ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$). В трехмерном пространстве индексы i, j принимают значения от 1 до 3. Если не происходит замены координат, то симметричный тензор второго ранга a_{ij} можно отождествить с его симметричной матрицей $[a_{ij}]$. Сумме двух тензоров второго ранга \mathbf{a} и \mathbf{b} соответствует матрица $[a_{ij} + b_{ij}]$, элементами которой являются суммы элементов соответствующих матриц. Умножению тензора \mathbf{a} на скаляр λ соответствует матрица $[\lambda a_{ij}]$.

Таким образом, относительно введенных операций сложения тензоров и умножения тензора на скаляр симметричные тензоры второго ранга образуют линейное пространство (в основном трехмерном пространстве линейное пространство симметричных тензоров второго ранга шестимерное).

Это пространство обозначим через Sym .

Свертка двух тензоров \mathbf{a} и \mathbf{b} определяет в Sym скалярное произведение $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_{ij}b_{ij}$. Тем самым пространство Sym превращается в *евклидово пространство*.

Введем обозначение $\|\mathbf{a}\| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}$.

С помощью единичного тензора \mathbf{I} тензор второго ранга \mathbf{t} разлагается на девиаторную \mathbf{t}^d и шаровую \mathbf{t}^s составляющие

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^d + \mathbf{t}^s, \quad \mathbf{t}^s = \frac{1}{3}t_{ii}\mathbf{I}, \quad \mathbf{t}^d = \mathbf{t} - \frac{1}{3}t_{ii}\mathbf{I}.$$

Подпространство девиаторов (тензоров с нулевой шаровой составляющей) обозначается через Sym^d и называется девиаторной плоскостью:

$$\text{Sym}^d = \{\mathbf{t} \in \text{Sym} : \mathbf{t}^s = 0\}.$$

3.1.1 Допустимые напряжения

Область в пространстве напряжений, в которой справедливы определяющие соотношения теории упругости, назовем упругой областью. В случае **идеальнопластического** тела область упругости не изменяется в процессе деформирования.

Множество, состоящее из области упругости и ее границы, называется *множеством допустимых напряжений*.

Множество напряжений, допустимых в точке x тела, обозначается C_x . Оно всегда предполагается *выпуклым, содержит точку, соответствующую нулевому напряжению и замкнутым (содержащим свою границу)*.

3.1.2 Поверхность текучести

Граница области допустимых напряжений называется поверхностью текучести.

Поверхность текучести задается уравнением $F_x(\boldsymbol{\sigma}) = 0$, где F_x — выпуклая непрерывная функция, определенная на пространстве Sym симметричных тензоров второго ранга, причем неравенство $F_x(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0$ является условием допустимости напряжений:

$$C_x = \{\boldsymbol{\sigma} \in Sym : F_x(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0\}.$$

Примеры.

Поверхность текучести Треска.

$$F_x(\boldsymbol{\sigma}) = \tau_{max}(\boldsymbol{\sigma}) - k_x, \quad \text{где } k_x > 0 \text{ — характеристика материала.}$$

$$C_x = \{\boldsymbol{\sigma} \in Sym : \tau_{max}(\boldsymbol{\sigma}) \leq k_x\}.$$

Поверхность текучести Треска кусочно гладкая и имеет ребра.

Поверхность текучести Мизеса.

$$F_x(\boldsymbol{\sigma}) = |\boldsymbol{\sigma}^d| - \sqrt{2}k_x, \quad \text{где } k_x > 0 \text{ — характеристика материала.}$$

$$C_x = \{\boldsymbol{\sigma} \in Sym : |\boldsymbol{\sigma}^d| \leq \sqrt{2}k_x\}.$$

(k_x — напряжение чистого сдвига, при котором начинается пластическое течение).

Поверхность текучести Мизеса гладкая.

Основные свойства поверхностей текучести Треска и Мизеса.

Функции F_x , задающие эти поверхности не зависят от шаровой составляющей тензора напряжений:

$$F_x(\boldsymbol{\sigma}) = F_x(\boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{I})$$

Таким образом, если $\boldsymbol{\sigma}$ — допустимые напряжения, то и напряжения $\boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{I}$, отличающиеся от напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ на шаровой тензор, — также допустимы.

Следовательно, множество допустимых напряжений C_x является в пространстве с цилиндром с осью, имеющей направление \mathbf{I} (рис. 3.2).

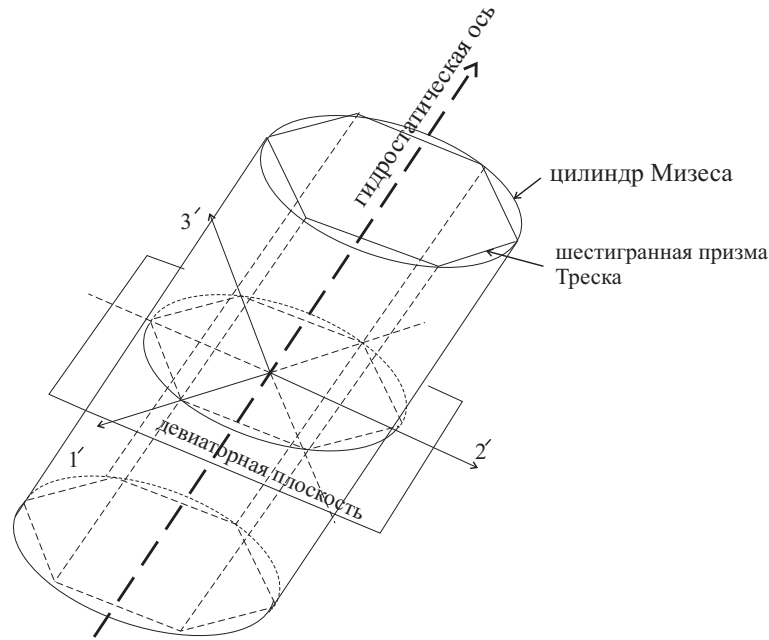


Рис. 3.2: Цилиндрические поверхности текучести

Цилиндр C_x полностью определяется его сечением C_x^d девиаторной плоскостью Sym^d , ортогональной направлению шарового тензора \mathbf{I} :

$$C_x^d = \{\boldsymbol{\sigma} \in C_x : \boldsymbol{\sigma}^s = 0\}, \quad C_x = \{\boldsymbol{\sigma} \in \text{Sym} : \boldsymbol{\sigma}^d \in C_x^d\}$$

Цилиндр допустимых напряжений C_x является

- выпуклым,
- замкнутым,
- множество C_x содержит нуль тогда и только тогда, когда нуль содержит его сечение C_x^d .

3.1.3 Принцип максимума

Принцип максимума формулируется следующим образом:

в жестко-идеальнопластическом теле напряжения σ допустимы и вместе со скоростями деформаций e удовлетворяют условию:

величина $e \cdot \sigma$ не меньше величины $e \cdot \sigma_$ для любых допустимых напряжений σ_* :*

$$\sigma \in C_x, \quad e \cdot (\sigma - \sigma_*) \geq 0 \quad \text{для любого } \sigma_* \in C_x, \quad (3.1)$$

где x — множество допустимых напряжений в точке x тела.

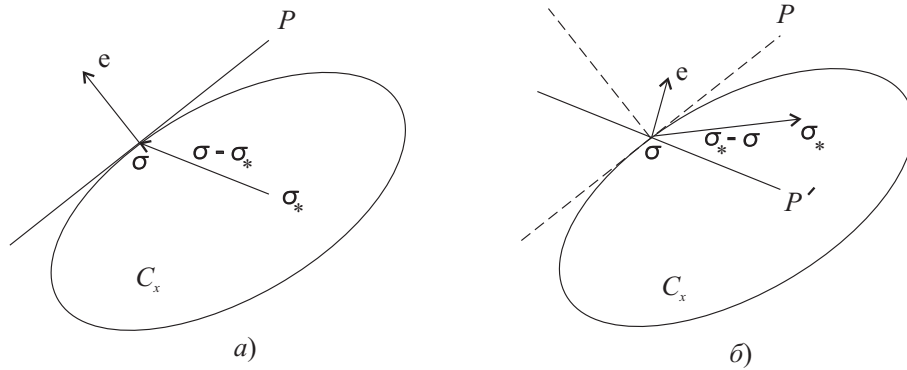


Рис. 3.3: Принцип максимума

Принцип максимума и нормальный (ассоциированный) закон течения.

В случае кусочно гладкой поверхности текучести принцип максимума и нормальный (ассоциированный) закон течения эквивалентны.

Множество допустимых значений в случае кусочно гладкой поверхности имеет вид:

$$C_x = \{\sigma \in \text{Sym} : F_x^{(1)} \leq 0, \dots, F_x^{(m)} \leq 0\},$$

где — выпуклые непрерывно дифференцируемые функции на пространстве Sym .

Нормальный закон текучести принимается в виде

$$e = \lambda_1 \frac{\partial F_x^{(1)}(\sigma)}{\partial \sigma} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_x^{(m)}(\sigma)}{\partial \sigma}, \quad (3.2)$$

$$F_x^{(1)}(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0, \dots, F_x^{(m)}(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0, \quad \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0,$$

Докажем это утверждение для случая гладкой поверхности текучести ($m = 1$).

Пусть $\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{e} \neq 0$ удовлетворяют нормальному закону текучести (3.2) и покажем, что в этом случае $\boldsymbol{\sigma}$ и \mathbf{e} обладают экстремальным свойством (3.1). При $\mathbf{e} \neq 0$ точка $\boldsymbol{\sigma}$ лежит на поверхности текучести. Проведем плоскость P , касающуюся поверхности текучести в этой точке (рис. 3.3). Множество C_x в силу его выпуклости лежит по одну ее сторону. Скорость деформации в соответствии с нормальным законом ортогональна плоскости P и направлена в полупространство, лежащее по другую сторону от P , чем C_x . Поэтому скалярное произведение $\mathbf{e} \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)$ неотрицательно для любых допустимых напряжений $\boldsymbol{\sigma}^*$. Тем самым выполнен принцип максимума (3.1).

Обратно, пусть скорость деформации $\mathbf{e} \neq 0$ и напряжение $\boldsymbol{\sigma}$ удовлетворяют принципу максимума (3.1). Покажем, что тогда выполняется нормальный закон (3.2). Напряжение $\boldsymbol{\sigma}$ лежит на поверхности текучести. Действительно, в противном случае в множестве C_x вместе с $\boldsymbol{\sigma}$ лежал бы и некоторый шар с центром в точке $\boldsymbol{\sigma}$. Перебирая всевозможные $\boldsymbol{\sigma}^*$ из этого шара, разности $(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)$ можно было бы придать любое направление. В частности, $\boldsymbol{\sigma}^*$ можно было бы выбрать так, чтобы выполнялось неравенство $\mathbf{e} \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) < 0$, что противоречит принципу (3.1). Итак, напряжение $\boldsymbol{\sigma}$ лежит на поверхности текучести. Допустим, что нормальный закон не выполняется при этом не выполнен, т. е. направление \mathbf{e} отличается от направления внешней нормали к поверхности текучести в точке $\boldsymbol{\sigma}$. Тогда плоскость P' , проходящая через эту точку и ортогональная вектору \mathbf{e} , не совпадает с касательной плоскостью P и, следовательно пересекается с множеством C_x (рис. 3.3, б). Тогда в C_x найдутся такие напряжения $\boldsymbol{\sigma}^*$, что вектор $(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)$ лежит по ту же сторону от плоскости P' , что и скорости деформаций \mathbf{e} . Поэтому справедливо неравенство $\mathbf{e} \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) > 0$. Это неравенство противоречит принципу (3.1). К этому противоречию привело предположение о том, что для $\boldsymbol{\sigma}$ и \mathbf{e} не выполнен нормальный закон течения. Следовательно, $\boldsymbol{\sigma}$ и \mathbf{e} удовлетворяют нормальному закону течения.

Принцип максимума связывает напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ и скорости деформаций \mathbf{e} с требованием, чтобы $\boldsymbol{\sigma}$ являлось решением экстремальной задачи

$$\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\sigma}_* \longrightarrow \sup, \quad \boldsymbol{\sigma}_* \in C_x$$

или, что то же самое, задачи

$$-e \cdot \sigma_* \longrightarrow \inf, \quad \sigma_* \in C_x$$

3.2 Постановка задач теории жесткопластического тела

Перечислим постановки основных задач в рамках модели жесткопластического тела [3].

3.2.1 Предельное равновесие жесткопластического тела.

Задача об определении системы предельных нагрузок ставится следующим образом.

Пусть S — поверхность, ограничивающая область V , занимаемую жесткопластическим телом. На части поверхности S_v заданы мгновенные скорости перемещений v_i , на части поверхности S_T — усилия μT_i , где μ — неопределенный множитель.

Требуется определить несущую способность тела, т. е. то значение параметра μ_T , при котором наступает общая текучесть, а именно, тело получает возможность неограниченно деформироваться.

При $\mu < \mu_T$ в теле могут возникать пластические зоны, но примыкающие к ним жесткие области могут не допускать неограниченного течения.

К задаче предельного равновесия относится, например, следующая задача. Пусть имеется образец с боковыми вырезами, торцы которого закреплены в зажимах. Зажимы перемещаются со скоростью v . При этом образец деформируется вследствие того, что в средней части образца наступает состояние общей текучести. Требуется определить величину силы, которую нужно приложить, чтобы образец действительно деформировался. Участки образца, примыкающие к зажимам остаются жесткими. И, следовательно, перемещаются со скоростью v . Распределение усилий в зоне захватов остаются совершенно неопределенными. Можно искать только величину суммарной силы.

В задачах о предельном равновесии рассматриваются только мгновенные распределения скоростей в момент исчерпания несущей способности, тогда как деформации считаются бесконечно малыми.

3.2.2 Стационарные задачи о пластическом формоизменении.

В задачах о пластическом формоизменении деформации велики.

Отметим, что в соотношения идеальной пластичности деформации сами по себе не входят. В эти соотношения входят только мгновенные скорости материальных точек. Поэтому в рамках модели жесткопластического тела возможна постановка следующих задач.

Пусть стержень диаметром D протягивается через коническую фильеру (рис. 3.4). В результате диаметр уменьшается до величины d , соответственно увеличивается длина. Требуется определить силу P , необходимую для осуществления протяжки. В результате решения можно определить и давление на стенки фильеры.

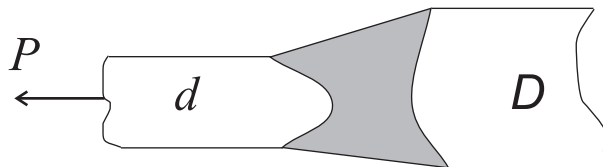


Рис. 3.4: Протяжка проволоки через коническую фильеру.

В заштрихованной области материал находится в пластическом состоянии. При решении стационарных задач о пластическом формоизменении фиксируется точка пространства, для этой точки пишутся уравнения пластичности, которые относятся не к какому-то определенному материальному элементу, а для того элемента, который в данный момент проходит через фиксированную точку пространства. Аналогично формулируются задачи о стационарном движении жидкости в координатах Эйлера.

3.2.3 Нестационарные задачи о пластическом формоизменении.

Значительно более сложными задачами являются задачи о нестационарном пластическом течении. Как правило, такие задачи связаны с изменением геометрии пластических областей в процессе деформирования. Для решения таких задач используются численные процедуры.

3.2.4 Единственность распределения напряжений в пластических областях.

В идеальном жесткопластическом теле существуют как жесткие области, так и области пластического течения. В пластических областях не определено распределение скоростей, а в жестких областях — распределение напряжений. Вообще говоря, не существует единственного решения задач о деформировании жесткопластического тела.

Тем не менее, можно доказать следующую теорему.

Теорема (о единственности распределения напряжений в пластических областях).

Пусть $\sigma'_{ij}, v'_i, \varepsilon'_{ij}$ и $\sigma''_{ij}, v''_i, \varepsilon''_{ij}$ — два решения, удовлетворяющие условиям равновесия, статическим и кинематическим граничным условиям. Тогда в пластических областях

$$\sigma'_{ij} = \sigma''_{ij}.$$

Доказательство. Разность напряжений $\sigma'_{ij} - \sigma''_{ij}$ удовлетворяет однородным уравнениям равновесия и нулевым граничным условиям на S_T . Поле скоростей деформаций $\varepsilon'_{ij} - \varepsilon''_{ij}$ является кинематически возможным и соответствует нулевым скоростям на части поверхности S_V .

Запишем уравнения равновесия тела в форме Лагранжа

$$\int_V (\sigma'_{ij} - \sigma''_{ij})(\varepsilon'_{ij} - \varepsilon''_{ij}) dV = 0.$$

Если поверхность текучести строго выпукла, то в силу принципа максимума в пластических областях выполняются неравенства

$$(\sigma'_{ij} - \sigma''_{ij})\varepsilon'_{ij} \geq 0, \quad (\sigma''_{ij} - \sigma'_{ij})\varepsilon''_{ij} \geq 0$$

причем равенство выполняется только тогда, когда $\sigma'_{ij} = \sigma''_{ij}$

Следовательно, из уравнения равновесия в форме Лагранжа следует, что

$$\sigma'_{ij} = \sigma''_{ij}$$

в пластических областях.

В жестких областях скорости деформаций равны нулю и распределение напряжений не определено.

3.2.5 Полное решение задачи идеальной пластичности.

Полным решением задачи теории идеальной пластичности называется решение, удовлетворяющее

- уравнениям равновесия,
- условию пластичности в пластических областях, в которых напряжения и скорости деформаций связаны ассоциированным законом течения,
- статическим и кинематическим граничным условиям.

Должно выполняться еще одно условие, связанное с возможным распределением напряжений в жестких областях. В жестких областях может существовать любое напряженное состояние, удовлетворяющее условиям равновесия, граничным условиям и условиям сопряжения с пластическими областями. Необходимо также, чтобы напряженное состояние в жестких областях удовлетворяло условию $f(\sigma_{ij}) \leq 0$, где f — функция текучести.

В отношении распределения скоростей и конфигурации жестких зон полное решение не единственно.

Однако, из теоремы о единственности распределения напряжений в пластических областях следует единственность предельной нагрузки, если условие пластичности выпуклое.

3.3 Предельные нагрузки

В идеально пластическом теле напряжения не могут превосходить предела текучести. Поэтому внешние силы, действующие на тело из идеально пластического материала, не могут возрастать неограниченно.

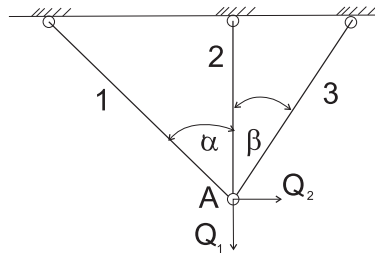
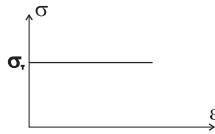
Система нагрузок, при которой в теле из идеально пластического материала впервые возникает неограниченное пластическое течение, *называется предельной системой нагрузок.*

Начнем с рассмотрения задачи об определении предельной нагрузки для стержневой системы [3]. На примере этой задачи можно проследить особенности постановки и свойств решения подобных задач.

3.3.1 Предельные нагрузки стержневой системы.

Рассмотрим систему из трех стержней [3], нагруженную двумя силами Q_1 и Q_2 (рис. 3.5). Материал стержней предполагается идеальным жесткопластическим. Через \dot{q}_1 и \dot{q}_2 обозначим компоненты вектора скорости точки A .

Система из трех стержней

Диаграмма $\sigma \sim \varepsilon$ материала стержней

σ - предел текучести материала на растяжение (сжатие)

Рис. 3.5: Система из трех стержней, материал которых является жесткопластическим

Для того, чтобы система превратилась в механизм, необходимо, чтобы два стержня перешли в пластическое состояние и тем самым получили возможность неограниченно деформироваться. Третий стержень остается жестким и будет вращаться около точки закрепления. Таким образом, существует только три направления возможного движения точки A . Рассмотрим эти три случая.

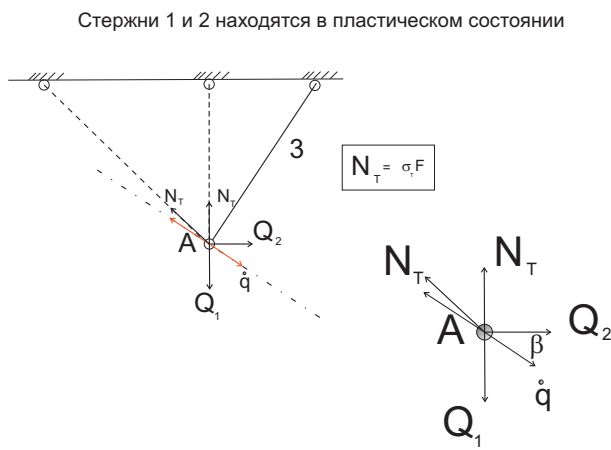
Случай 1 (рис. 3.6). Стержни 1 и 2 находятся в состоянии текучести, вращается стержень 3. Вектор скорости точки A перпендикулярен стержню 3. Следовательно,

$$\dot{q}_1 = \lambda \cos \beta, \quad \dot{q}_2 = \lambda \sin \beta.$$

При вращении стержня 3 против часовой стрелки стержни 1 и 2 будут оба растягиваться. Усилия в стержнях 1 и 2 при этом одинаковы и равны $N_T = \sigma_T F$, где F — площадь поперечного сечения стержней. Усилие в стержне 3 для нас несущественно, поскольку уравнение равновесия точки A в момент превращения

системы в механизм запишем в проекции на направление, перпендикулярное стержню 3:

$$Q_1 \cos \beta + Q_2 \sin \beta = \pm N_T (\sin \beta + \sin(\alpha + \beta)). \quad (3.3)$$



$$Q_1 \cos \beta + Q_2 \sin \beta = \pm N_T (\sin \beta + \sin(\alpha + \beta));$$

$$\dot{q} = (\lambda \cos \beta, \lambda \sin \beta)$$

Рис. 3.6: Стержни 1 и 2 находятся в состоянии текучести, вращается стержень 3

Случай 2 (рис. 3.7). Стержни 1и 3 находятся в состоянии текучести, вращается стержень 2. Вектор скорости точки A направлен по горизонтали. Следовательно,

$$\dot{q}_1 = \lambda, \quad \dot{q}_2 = 0.$$

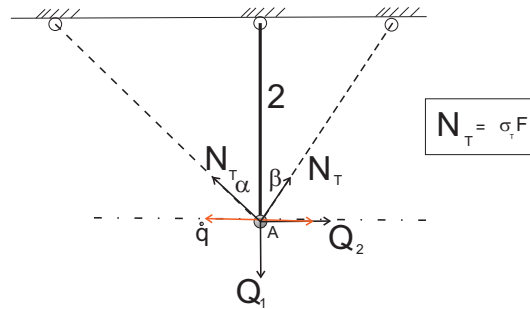
Если стержень 1 удлиняется, то стержень 3 будет укорачиваться. Следовательно усилия в них разных знаков. Проектируя все силы на горизонтальное направление, получим

$$Q_1 = \pm N_T (\sin \alpha + \sin \beta). \quad (3.4)$$

Случай 3 (рис. 3.8). Стержни 2 и 3 находятся в состоянии текучести, вращается стержень 1. При вращении стержня 1 против часовой стрелки усилия в стержнях 2 и 3 будут сжимающими. Вектор скорости точки A перпендикулярна стержню 1. Следовательно,

$$\dot{q}_1 = \lambda \cos \alpha, \quad \dot{q}_2 = -\lambda \sin \alpha.$$

Стержни 1 и 3 находятся в пластическом состоянии



Уравнение равновесия узла A :

$$Q_1 = \pm N_T (\sin \alpha + \sin \beta); \quad \dot{q} = (\lambda, 0)$$

Рис. 3.7: Стержни 1 и 3 находятся в состоянии текучести, вращается стержень 2.

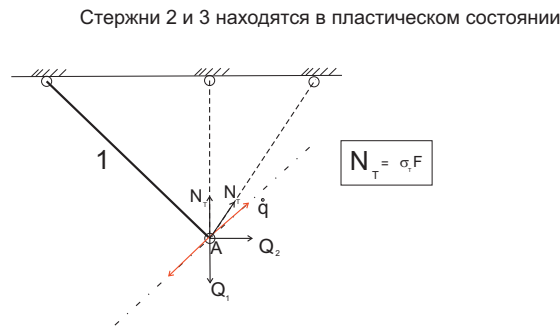
Условия равенства нулю проекций всех сил на направление скорости имеет вид:

$$Q_1 \cos \alpha - Q_2 \sin \alpha = \pm N_T (\sin \alpha + \sin(\alpha + \beta)). \quad (3.5)$$

В зависимости от комбинаций стержней, перешедших в состояние текучести, мы получили три распределения скоростей и шесть условий текучести, линейных относительно Q_1 и Q_2 . Запишем условия (3.3), (3.4), (3.5) в виде $f(Q_1, Q_2) = 0$. Можно проверить, что выполняется соотношение $\dot{q}_i = \lambda(\partial f / \partial Q_i)$.

Шесть прямых (3.3), (3.4), (3.5) в плоскости Q_1, Q_2 образуют шестиугольник, представляющий собой поверхность текучести.

На рисунке 3.9 показана поверхность текучести, когда $\alpha = \beta = 45^\circ$. Эта поверхность состоит из прямолинейных участков, но имеет угловые точки, в которых производная функция $f(Q_1, Q_2)$ не существует. Скорость в этих точках не может быть вычислена по формуле $\dot{q}_i = \lambda(\partial f / \partial Q_i)$. В угловых точках нагрузка удовлетворяет одновременно двум условиям. Например, в угловой точке m , нагрузка удовлетворяет одновременно условию (3.3) и условию (3.4). Следовательно, все три стержня находятся в состоянии текучести. Однако, направление скорости точки не может быть произвольным. Должны выполняться следующие кинематические условия [3]. Скорость этой точки должна такой, чтобы стержень 1 продолжал удлиняться (что соответствует случаям 1 и 2), стержень 2 продолжал удлиняться (случай 2), а стержень 3 — укорачиваться (случай 2). эти условия будут выполнены, если вектор скорости точки A лежит внутри



$$Q_1 \cos \alpha - Q_2 \sin \alpha = \pm N_T (\sin \alpha + \sin (\alpha + \beta)) ;$$

$$\dot{\mathbf{q}} = (\lambda \cos \alpha, -\lambda \sin \alpha)$$

Рис. 3.8: Стержни 2 и 3 находятся в состоянии текучести, вращается стержень 1.

угла, образованного прямыми, перпендикулярными к направлениям стержней 1 и 3. На рисунке 3.9 ружно провести нормали к сторонам шестиугольника, пересекающимся в точке m . Направление вектора скорости в точке m не определено. Вектор скорости в этом случае находится внутри угла, образованного этими нормальями.

3.4 Экстремальные свойства предельных состояний текучести

В общем случае определение предельных нагрузок является достаточно трудной задачей. Однако, существуют теоремы об экстремальных свойствах предельных состояний текучести, позволяющие оценить предельные нагрузки снизу и сверху.

3.4.1 Теорема о нижней оценке несущей способности

Определение. Распределение напряжений σ_{ij}^* называется *статически допустимым*, если

- оно удовлетворяет всюду в теле уравнениям равновесия: $\sigma_{ij,j}^* = 0$,

Поверхность текучести

$$Q_1 \cos \beta + Q_2 \sin \beta = \pm N_f (\sin \beta + \sin (\alpha + \beta)) ;$$

$$Q_1 = \pm N_f (\sin \alpha + \sin \beta) ;$$

$$Q_1 \cos \alpha - Q_2 \sin \alpha = \pm N_f (\sin \alpha + \sin (\alpha + \beta))$$

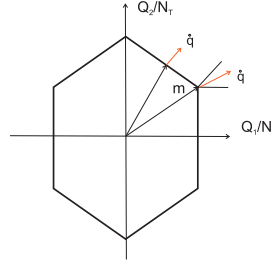


Рис. 3.9: Поверхность текучести

- удовлетворяет граничным условиям на части поверхности S_T : $\sigma_{ij}^* n_j = \hat{T}_i$
- и всюду в теле выполняется неравенство $f(\sigma_{ij}^*) \leq 0$.

Теорема 1 (о нижней оценке несущей способности). Пусть $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, v_i$ — истинное решение задачи о предельном состоянии тела, на которое на части поверхности S_T действуют поверхностные нагрузки \hat{T}_i ; σ_{ij}^* — статически допустимое напряженное состояние, которому на части поверхности S_v соответствуют поверхностные силы T_i^* . Тогда выполняется неравенство

$$\int_{S_v} T_i v_i dS \geq \int_{S_v} T_i^* v_i dS.$$

Доказательство. Составим уравнения равновесия в форме Лагранжа как для истинного, так и для статически допустимого полей напряжений. За виртуальное (возможное) поле скоростей примем истинное поле скоростей:

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_{S_v} T_i v_i dS + \int_{S_T} \hat{T}_i v_i dS,$$

$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV = \int_{S_v} T_i^* v_i dS + \int_{S_T} \hat{T}_i v_i dS,$$

В этих равенствах $T_i = \sigma_{ij} n_j$, $T_i^* = \sigma_{ij}^* n_j$.

Вычитая из второго равенства первое, получим

$$\int_{S_v} T_i v_i dS - \int_{S_v} T_i^* v_i dS = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \varepsilon_{ij} dV.$$

Но в силу принципа максимума диссипации механической энергии

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \varepsilon_{ij} \geq 0 \quad \text{всюду в объеме } V.$$

Следовательно,

$$\int_{S_v} T_i v_i dS \geq \int_{S_v} T_i^* v_i dS.$$

ч.т.д. Доказанное неравенство можно использовать для получения нижней оценки предельной (несущей) нагрузки.

Пусть внешняя нагрузка сводится к одной обобщенной силе, т.е. $\int_{S_v} T_i v_i dS = Q\dot{q}$. В этом случае $\int_{S_v} T_i^* v_i dS = Q^*\dot{q}$ и, следовательно,

$$Q \geq Q^*.$$

Пусть на части поверхности S_T нагрузки заданы в виде μT_i^0 , где μ — неопределённый множитель и статически допустимое напряженное состояние удовлетворяет на части поверхности S_T условиям $\sigma_{ij}^* n_j = \mu^* T_i$. Тогда множитель μ можно принять за обобщённую силу. В этом случае обобщённая скорость будет равна $\int_{S_T} T_i^0 v_i dS$. И неравенство принимает вид

$$\mu \geq \mu^*.$$

Коэффициентом запаса, соответствующим некоторой системе нагрузок T_i , не превышающих предельного значения, назовем число μ , если нагрузки μT_i являются предельными. Число μ^* назовём статически допустимым множителем.

Тогда доказанное выше неравенство можно эквивалентно следующему утверждению.

Коэффициент запаса является наибольшим допустимым множителем $\mu^ \leq \mu$. Или статически допустимый множитель является нижней оценкой коэффициента запаса.*

3.4.2 Теорема о верхней оценке несущей способности

Теорема 2 (о верхней оценке несущей способности). Пусть $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, v_i$ — истинное решение задачи о предельном состоянии тела, на которое на части поверхности S_T действуют поверхностные нагрузки \hat{T}_i ;

Пусть $v_i^*, \varepsilon_{ij}^*$ — произвольное кинематически допустимое поле скоростей и скоростей деформации, т.е. $v_i^* = v_i$ на части поверхности S_V . По скоростям деформаций ε_{ij}^* однозначно определяются напряжения σ_{ij}^* (если поверхность текучести выпуклая).

Тогда выполняется неравенство

$$\int_S T_i v_i^* dS \leq \int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* dV.$$

Доказательство. Составим уравнения равновесия в форме Лагранжа, приняв за поле возможных перемещений v_i^*

$$\int_S T_i v_i^* dS = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV.$$

Прибавим и вычтем в правой части этого равенства мощность пластического формоизменения, соответствующего кинематически допустимому полю скоростей, т.е. $\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* dV$.

В результате получим

$$\int_S T_i v_i^* dS = \int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* - \int_V (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \varepsilon_{ij}^* dV.$$

В силу принципа максимума второе слагаемое в правой части неотрицательное и, следовательно, имеет место требуемое неравенство

$$\int_S T_i v_i^* dS \leq \int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* dV.$$

В частности, если внешняя нагрузка сводится к одной обобщённой силе, то из последнего неравенства следует неравенство

$$Q \leq \frac{1}{\dot{q}} \int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* dV.$$

3.5 Плоская задача идеального жесткопластического тела.

3.5.1 Постановка задачи.

Пусть x_1, x_2, x_3 — декартова система координат.

Под "плоской" будем понимать задачу, в которой выполняются следующие условия [3]:

- неизвестными являются три компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$, три компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$ и две компоненты вектора скорости v_1, v_2 как функции двух независимых переменных x_1, x_2
- остальные компоненты тензора напряжений, тензора деформаций и вектора перемещений не обязательно равны нулю, но могут быть определены после решения "плоской" задачи.
- условие пластичности может быть выражено в виде соотношения между главными напряжениями σ_1 и σ_2 в плоскости x_1 и x_2 . Напряжение σ_3 предполагается либо вообще не входящим в условие пластичности, либо исключенным из этого условия.

Пусть σ_1 и σ_2 — главные напряжения в плоскости x_1 и x_2 .

Вместо σ_1 и σ_2 введем величины

$$p = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2). \quad (3.6)$$

Тогда условие пластичности может быть записано в виде:

$$\tau = \tau(p). \quad (3.7)$$

Обозначим через ψ угол между первым главным направлением и осью x_1 . Используя формулы перехода от одной системы координат к другой, компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ через p, τ, ψ :

$$\sigma_{11} = p + \tau(p) \cos 2\psi, \quad \sigma_{22} = p - \tau(p) \cos 2\psi, \quad \sigma_{12} = \tau(p) \sin 2\psi, \quad (3.8)$$

3.5.2 Уравнения для определения поля напряжений.

Подставим выражения (3.8) в уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \quad (3.9)$$

В результате получим систему двух квазилинейных уравнений в частных производных относительно величин p и ψ :

$$(1 + \tau' \cos 2\psi)p_{,1} - 2\tau(\sin 2\psi)\psi_{,1} + \tau' p_{,2} \sin 2\psi + 2\tau(\cos 2\psi)\psi_{,2} = 0, \quad (3.10)$$

$$(1 - \tau' \cos 2\psi)p_{,2} + 2\tau(\sin 2\psi)\psi_{,2} + \tau' p_{,1} \sin 2\psi + 2\tau(\cos 2\psi)\psi_{,1} = 0, \quad (3.11)$$

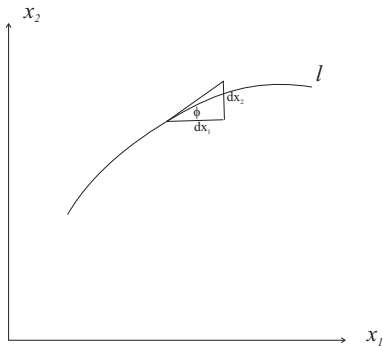
где $\tau' = \frac{d\tau}{dp}$.

Зная функции p и ψ , по формулам (3.8) можно определить напряжения. Таким образом, для определения напряжений мы имеем систему двух квазилинейных уравнений относительно двух неизвестных функций.

Характеристики уравнений для определения поля напряжений.

Определим тип системы уравнений (3.10), (3.11).

Допустим, что решение системы уравнений (3.10), (3.11) существует в окрестности некоторой кривой L , расположенной в плоскости x_1, x_2 . К системе уравнений (3.10), (3.11) добавим соотношения, выполняющиеся вдоль кривой L



$$p_{,1}dx_1 + p_{,2}dx_2 = 0, \quad \psi_{,1}dx_1 + \psi_{,2}dx_2 = 0$$

Для определения производных p_1, ψ_1, p_2, ψ_2 на кривой L имеем систему линейных уравнений. Определитель матрицы этой системы относительно производных p_1, ψ_1, p_2, ψ_2 равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + \tau' \cos 2\psi & -2\tau \sin 2\psi & \tau' \sin 2\psi & 2\tau \cos 2\psi \\ \tau' \sin 2\psi & 2\tau \cos 2\psi & 1 - \tau' \cos 2\psi & 2\tau \sin 2\psi \\ dx_1 & 0 & dx_2 & 0 \\ 0 & dx_1 & 0 & dx_2 \end{vmatrix}$$

Определитель расширенной матрицы равен

$$D = \begin{vmatrix} 1 + \tau' \cos 2\psi & -2\tau \sin 2\psi & \tau' \sin 2\psi & 2\tau \cos 2\psi & 0 \\ \tau' \sin 2\psi & 2\tau \cos 2\psi & 1 - \tau' \cos 2\psi & 2\tau \sin 2\psi & 0 \\ dx_1 & 0 & dx_2 & 0 & dp \\ 0 & dx_1 & 0 & dx_2 & d\psi \end{vmatrix}$$

Характеристическое направление (dx_1, dx_2) определяется из уравнения

$$\Delta = dx_1^2(\cos 2\psi + \tau') + 2dx_1dx_2 \sin 2\psi + (\cos 2\psi - \tau')dx_2^2 = 0$$

Решая это уравнение относительно $\frac{dx_2}{dx_1}$, получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\sin 2\psi \pm \sqrt{1 - \tau'^2}}{\cos 2\psi + \tau'}$$

Если $|\tau'| < 1$ — система гиперболическая

Если $|\tau'| = 1$ — система параболическая

Если $|\tau'| > 1$ — система эллиптическая

Рассмотрим случай $|\tau'| < 1$. В этом случае система является гиперболической и имеется два семейства вещественных характеристик.

Будем называть семейство характеристик

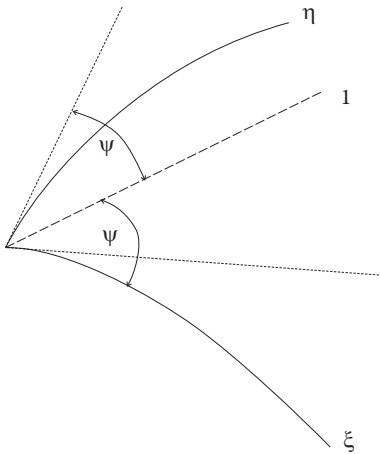
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\sin 2\psi - \sqrt{1 - \tau'^2}}{\cos 2\psi + \tau'}$$

ξ — характеристиками,

а семейство характеристик

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\sin 2\psi + \sqrt{1 - \tau'^2}}{\cos 2\psi + \tau'}$$

η — характеристиками.



Если ось x_1 направить по касательной к характеристике ξ , то угол $\varphi = 0$ и, следовательно, на ξ — характеристике выполняется соотношение

$$\sin 2\psi = +\sqrt{1 - \tau'^2}.$$

Аналогично на η — характеристике выполняется соотношение

$$\sin 2\psi = +\sqrt{1 + \tau'^2}.$$

Следовательно,

$$\cos 2\psi = \tau'.$$

Из предыдущих соотношений следует, что

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt{\frac{1 - \tau'}{1 + \tau'}}.$$

На характеристиках должны выполняться условия (ранг матрицы системы равняется рангу расширенной матрицы)

$$\begin{aligned} & \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 + \tau' \cos 2\psi & -2\tau \sin 2\psi & \tau' \sin 2\psi & 2\tau \cos 2\psi \\ \tau' \sin 2\psi & 2\tau \cos 2\psi & 1 - \tau' \cos 2\psi & 2\tau \sin 2\psi \\ dx_1 & 0 & dx_2 & 0 \\ 0 & dx_1 & 0 & dx_2 \end{pmatrix} = \\ & = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 + \tau' \cos 2\psi & -2\tau \sin 2\psi & \tau' \sin 2\psi & 2\tau \cos 2\psi & 0 \\ \tau' \sin 2\psi & 2\tau \cos 2\psi & 1 - \tau' \cos 2\psi & 2\tau \sin 2\psi & 0 \\ dx_1 & 0 & dx_2 & 0 & dp \\ 0 & dx_1 & 0 & dx_2 & d\psi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Эти условия приводят к следующим соотношениям на характеристиках:

$$\frac{1}{2\tau} \sqrt{1 - \tau'^2} dp - d\psi = 0 \quad \text{на } \xi\text{-характеристике}$$

и

$$\frac{1}{2\tau} \sqrt{1 - \tau'^2} dp + d\psi = 0 \quad \text{на } \eta\text{-характеристике.}$$

Обозначим

$$G(p) = \frac{1}{2} \int \sqrt{1 - \tau'^2} \frac{dp}{\tau}.$$

Тогда соотношения на характеристиках записываются в следующем виде:

$$G(p) - \psi = \text{const} \quad \text{на } \xi\text{-характеристике}$$

и

$$G(p) + \psi = \text{const} \quad \text{на } \eta\text{-характеристике}$$

3.5.3 Уравнения для определения поля скоростей.

Условие пластичности запишем в виде

$$F(\sigma_1, \sigma_2) = \tau - \tau(p) = 0 \quad \left(\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right).$$

Из ассоциированного закона пластичности следует

$$\dot{\varepsilon}_1 = \lambda(1 - \tau'), \quad \dot{\varepsilon}_2 = -\lambda(1 + \tau'), \quad \dot{\varepsilon}_{12} = 0.$$

Исключая λ , получим

$$(1 + \tau')\dot{\varepsilon}_1 + (1 - \tau')\dot{\varepsilon}_2 = 0.$$

Учитывая, что $\dot{\varepsilon}_1 = \partial v_1 / \partial x_1$ и $\dot{\varepsilon}_2 = \partial v_2 / \partial x_2$, получаем уравнение в частных производных относительно компонент вектора скорости

$$(1 + \tau')v_{1,1} + (1 - \tau')v_{2,2} = 0.$$

Добавим к этому уравнению условие $\dot{\varepsilon}_{12} = 0$: или

$$v_{1,2} + v_{2,1} = 0.$$

Таким образом, имеем систему двух дифференциальных уравнений для двух компонент вектора скорости

$$(1 + \tau')v_{1,1} + (1 - \tau')v_{2,2} = 0, \quad v_{1,2} + v_{2,1} = 0.$$

Можно показать [3], что эта система имеет те же два семейства характеристик, что и система уравнений для определения поля напряжений.

Соотношения вдоль характеристик в этом случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} - v_{n\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= 0 \quad \text{на } \xi\text{-характеристике} \\ \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} - v_{n\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} &= 0 \quad \text{на } \eta\text{-характеристике} \end{aligned}$$

Здесь v_ξ и $v_{n\xi}$ — проекции вектора скорости \mathbf{v} на касательную к линии ξ и нормаль к ней соответственно. Аналогично v_η и $v_{n\eta}$ — проекции вектора скорости \mathbf{v} на касательную к линии η и нормаль к ней соответственно.

3.5.4 Условия пластичности Мизеса и Треска — Сен-Венана в случае плоской деформации.

Условие пластичности Мизеса в главных напряжениях записывается следующим образом:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2.$$

Вследствие ассоциированного закона пластичности

$$\dot{\epsilon}_3 = \lambda(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) = 0.$$

Следовательно,

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

Подставляя это выражение в условие пластичности, получим

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T.$$

Условие пластичности Треска:

пластичность наступает тогда, когда максимальное касательное напряжение достигает критического значения.

В случае плоской деформации равенство нулю компоненты тензора скорости деформации $\dot{\epsilon}_3$ означает, что напряжение не входит в условие пластичности. Тогда, если σ_1 наибольшее главное напряжение, а σ_2 — наименьшее, условие пластичности Треска запишется в виде:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_T.$$

Таким образом, в случае плоской деформации условие пластичности Мизеса и условие пластичности Треска — Сен-Венана сводятся к равенству

$$\tau = k$$

и различаются только значением константы k .

Итак, в случае плоской деформации ($\dot{\epsilon}_3 = 0$) условия пластичности Мизеса и условие пластичности Треска — Сен-Венана сводятся к равенству

$$\tau(p) = k,$$

где

$$p = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad \tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

и различаются только значением константы k .

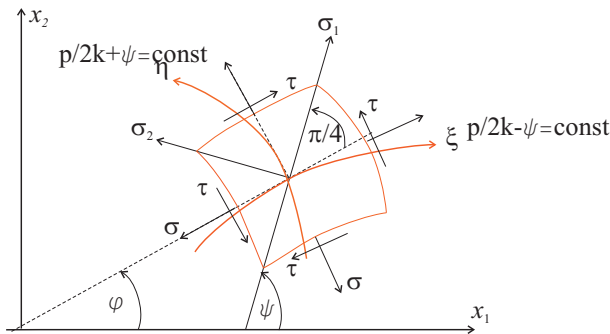
Следовательно, $\tau' = d\tau/dp = 0$.

Полагая в ранее полученном равенстве

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt{\frac{1 - \tau'}{1 + \tau'}}.$$

$\tau' = d\tau/dp = 0$, получаем $\operatorname{tg}\psi = 1$. Следовательно, угол между касательными к характеристикам и 1-м главным направлением равен $\pi/4$. Но на площадках, равнонаклоненных к главным осям, достигают максимального значения касательные напряжения.

Следовательно, характеристики — это *траектории главных касательных напряжений* или *линии скольжения*.



Соотношения на характеристиках :

$$G(p) - \psi = \text{const} \quad \text{на} \quad \xi - \text{характеристике}$$

и

$$G(p) + \psi = \text{const} \quad \text{на } \eta\text{-характеристике,}$$

где

$$G(p) = \frac{1}{2} \int \sqrt{1 - \tau'^2} \frac{dp}{\tau}.$$

принимают в случае условий Треска — Сен-Венан Мизеса следующий вид:

$$\frac{p}{2k} - \psi = \text{const} \quad \text{на } \xi\text{-характеристике}$$

$$\frac{p}{2k} + \psi = \text{const} \quad \text{на } \eta\text{-характеристике}$$

Из соотношений на характеристиках следует естественный выбор координатных параметров на характеристических линиях:

$$\frac{p}{2k} + \psi = \xi, \quad \frac{p}{2k} - \psi = \eta$$

Такой выбор возможен только в том случае, если существует взаимно однозначное соответствие между координатами x_1, x_2 и параметрами ξ, η .

Используя соотношения вдоль характеристик, можно получить ряд полезных свойств характеристических линий, которые используются при построении полей напряжений [4]. Приведем некоторые из них.

Свойство 1. Вдоль линии скольжения давление p изменяется пропорционально углу между касательной к линии скольжения и осью x_1 .

Свойство 2. (Первая теорема Генки) Если переходить от одной линии скольжения η к другой вдоль любой линии скольжения семейства ξ , то угол φ и давление p будут изменяться на одну и ту же величину.

Свойство 3. Если известно значение p в какой либо точке заданной сетки линий скольжения, то оно может быть вычислено в любой точке.

Свойство 4. Если некоторый отрезок линии скольжения — прямой, то вдоль него постоянны величины p и ψ , и компоненты напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$. и, следовательно,

если в некоторой области прямолинейны оба семейства линий скольжения, то в этой области напряжения распределены равномерно (не зависят от координат).

Свойство 5. Если некоторый отрезок линии скольжения семейства ξ (или η) — прямой, то все соответствующие отрезки линий ξ (или η) — прямые.

Свойство 6. Прямые отрезки, отсекаемые линиями скольжения другого семейства, имеют одинаковую длину.

Итак, пусть в качестве координатных параметров характеристических линий выбраны параметры

$$\frac{p}{2k} + \psi = \xi, \quad \frac{p}{2k} - \psi = \eta.$$

Поскольку угол наклона ψ характеристик к линиям главных напряжений отличается от угла φ на постоянную величину $\pi/4$, то в соотношения на характеристиках угол ψ можно заменить на угол φ .

Дифференциальные уравнения характеристик в плоскости x_1, x_2 имеют вид:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg}\varphi \quad \text{на линии } \xi, \quad \frac{dx_2}{dx_1} = -\operatorname{ctg}\varphi \quad \text{на линии } \eta$$

Следовательно,

$$\frac{\partial x_2}{\partial \xi} - \operatorname{tg}\varphi \frac{\partial x_1}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \eta} + \operatorname{ctg}\varphi \frac{\partial x_1}{\partial \eta} = 0$$

Ведем новые переменные

$$x_1 = \bar{x}_1 \cos \varphi - \bar{x}_2 \sin \varphi, \quad x_2 = \bar{x}_1 \sin \varphi + \bar{x}_2 \cos \varphi$$

В этих переменных последние дифференциальные соотношения запишутся в виде

$$\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \bar{x}_1 = 0, \quad \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \eta} - \frac{1}{2} \bar{x}_2 = 0$$

Исключая из этих уравнений \bar{x}_1 или \bar{x}_2 , получим уравнение одного и того же вида

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{4} f = 0.$$

Дифференциальная система уравнений для определения поля скоростей имеет те же самые семейства характеристик, что и для поля напряжений. Соотношения на характеристиках для компонент вектора скорости имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} - v_{n\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= 0 \quad \text{на } \xi\text{-характеристике} \\ \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} - v_{n\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} &= 0 \quad \text{на } \eta\text{-характеристике} \end{aligned}$$

Для ортогональной сетки характеристик выполняются равенства $v_{n\xi} = v_\eta$, $v_{n\eta} = -v_\xi$.

Поэтому соотношения на характеристиках для компонент вектора скорости принимают вид:

$$\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} - \frac{1}{2}v_\eta = 0, \quad \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{2}v_\xi = 0$$

Исключая из этих уравнений v_ξ или v_η , получим уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{4}f = 0$$

3.5.5 Численное решение задачи Коши для поля напряжений.

Пусть на участке дуги AB границе области, занятой телом и находящемся в условиях плоской деформации, заданы усилия.

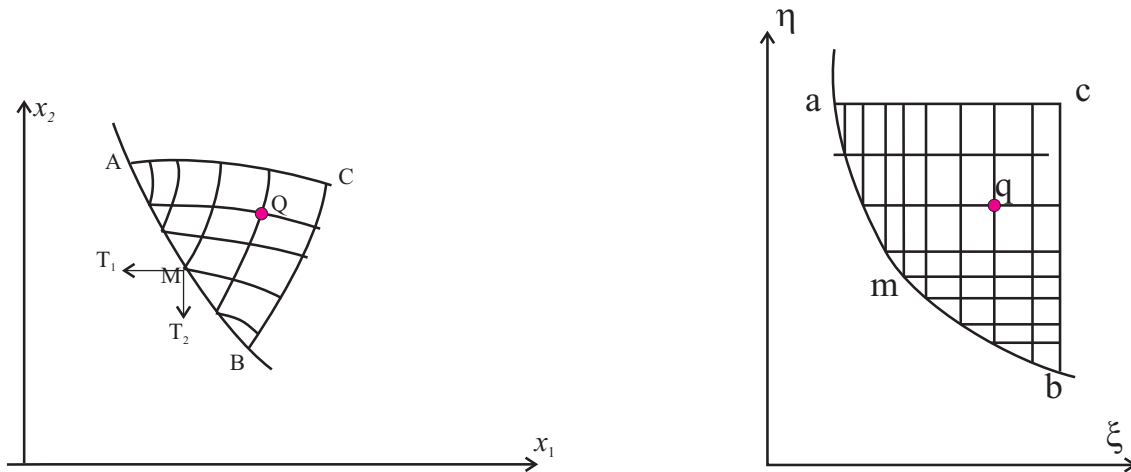
В формулах

$$\sigma_{11} = p + \tau(p) \cos 2\psi, \quad \sigma_{22} = p - \tau(p) \cos 2\psi, \quad \sigma_{12} = \tau(p) \sin 2\psi$$

положим $\psi = \varphi + \pi/4$.

В результате получим

$$\sigma_{11} = p - \tau \sin 2\varphi, \quad \sigma_{22} = p + \tau \sin 2\varphi, \quad \sigma_{12} = \tau \cos 2\varphi$$



Поскольку на дуге AB контура в каждой точке выполнены условия $\sigma_{\alpha\beta} = T_\alpha$, а $\sigma_{\alpha\beta}$ выражаются через две величины p и φ , то каждой точке контура M можно сопоставить точку m в плоскости характеристик ξ, η , а отрезку кривой AB в

плоскости x_1, x_2 будет соответствовать отрезок ab в плоскости характеристик. Для каждой точки m кривой ab в плоскости характеристик можно вычислить величины \bar{x}_1, \bar{x}_2 . Затем в плоскости характеристик интегрируется линейная система уравнений относительно величин \bar{x}_1, \bar{x}_2 . Решение определяется в характеристическом треугольнике abc .

$$\begin{aligned}(\bar{x}_2)_{m,n} &= (\bar{x}_2)_{m-1,n} - \frac{1}{2}(\bar{x}_1)_{m-1,n}\Delta\xi, \\(\bar{x}_1)_{m,n} &= (\bar{x}_1)_{m,n-1} + \frac{1}{2}(\bar{x}_2)_{m,n-1}\Delta\eta\end{aligned}$$

Таким образом для каждого узла в плоскости ξ, η вычисляются величины \bar{x}_1, \bar{x}_2 . А, следовательно, координаты соответствующих точек в плоскости x_1, x_2 . Тем самым мы определяем криволинейные характеристики в плоскости x_1, x_2 . По координатам ξ, η вычисляются величины p и φ , а, следовательно, компоненты тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ в каждой точке Q .

3.5.6 Простые решения. Задача Прандтля

Пусть на участок прямолинейной границы действуют равномерно распределенные нормальные усилия σ_n и касательные усилия τ_n . Нормаль \mathbf{n} к границе образует в этом случае постоянный угол α с осью x_1 . Нормальное и касательное напряжения на границе вычисляются по формулам:

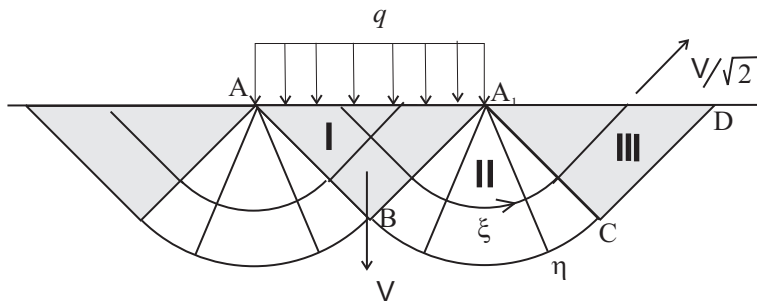
$$\sigma_n = p - k \sin 2(\varphi - \alpha), \quad \tau_n = k \cos 2(\varphi - \alpha).$$

Следовательно, p и φ — постоянные величины. Отсюда следует, что и величины ξ и η так же постоянные. Отрезок AB отображается на плоскости ξ, η в одну точку (ξ_0, η_0) . Угол наклона характеристик φ постоянен, поэтому пластическое поле представляет собой треугольник; внутри этого треугольника величина p постоянна и имеет то же значение, что и на границе.

Задача Прандтля о вдавливании гладкого штампа в полупространство.

В прямолинейную границу полупространства вдавливается гладкий штамп. Под штампом возникает распределенное давление q . Треугольная область под штампом соответствует точке в плоскости характеристик. В этой области возникает

Решение Прандтля



постоянное напряженное состояние. При этом $\sigma_{22} = -q$. Характеристики подходят к поверхности под углом $\pi/4$. Пусть ξ - характеристика — линия, проведенная из точки по штампу под углом $-\pi/4$.

Тогда

$$\sigma_{22} = -q = p - k.$$

Следовательно,

$$p = k - q$$

в области I.

Пристроим к области I центрированное поле характеристик (область II), соединяющее область I с областью III. Характеристика семейства ξ выходит из области I под углом $-\pi/4$, превращается в дугу окружности, ортогональной к прямолинейным характеристикам семейства η и продолжается в области III как отрезок прямой, пересекающей границу под углом $\pi/4$. В области III $\sigma_{22} = 0$, и, следовательно, $0 = p + k$, или

$$p = -k.$$

Но вдоль ξ - характеристики величина η постоянна

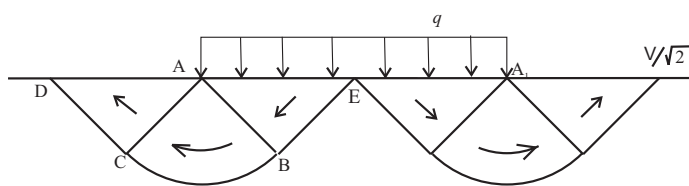
$$\frac{k - q}{2k} + \frac{\pi}{4} = \frac{-k}{2k} - \frac{\pi}{4}.$$

Из последнего равенства следует формула для предельной нагрузки:

$$q = (2 + \pi)k.$$

Поле характеристик в этой задаче строится неоднозначно [3]. На следующем рисунке приведено решение Хилла. Несмотря на другое распределение поля скоростей, предельная нагрузка в решении Хилла вычисляется по той же формуле, что и в решении Прандтля.

Решение Хилла



3.6 Полуобратный метод Сен-Венана

Построение решения прямых задач даже линейной теории упругости, и тем более задач о пластическом деформировании, как правило, является весьма трудной задачей.

Одним из методов, позволяющим построить решения ряда практически важных задач является полуобратный метод Сен-Венана. Сам Сен-Венан применил этот метод для решения задачи о кручении призматических стержней. Сущность метода состоит в следующем. Руководствуясь физическим существом решаемой конкретной задачи, предугадывают основные свойства ее математического решения и принимают те или иные закономерности для перемещений или напряжений. Затем, используя математический аппарат, строят решение и проверяют не противоречит ли принятые гипотезы соответствующим дифференциальным уравнениям и определяющим соотношениям.

3.6.1 Задача о кручении стержней.

Рассмотрим задачу о кручении призматических стержней [4].

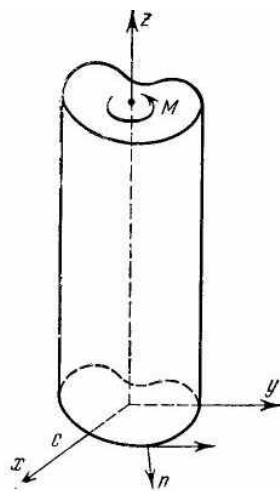


Рис. 3.10: К задаче о кручении стержня

Пусть нижний конец стержня закреплен, а ось z параллельна его оси (рис. 3.10). Стержень скручивается моментом M .

Примем гипотезы Сен-Венана:

поперечные сечения стержня испытывают жесткий поворот в своей плоскости и искривляются в направлении оси Z :

$$\begin{aligned} u_x &= -\omega zy, & u_y &= -\omega zx, \\ u_z &= w(x, y, \omega z), \end{aligned}$$

ω — кручение на единицу длины; w — неизвестная функция. Функция $w(x_1, x_2)$ характеризует искривление (депланацию) поперечного сечения.

По формулам Коши получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} - \omega y, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \omega x. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Как из закона Гука, так и из уравнений пластического течения следует, что

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy}. \quad (3.13)$$

В сечениях $z = \text{const}$ действует вектор напряжения $\boldsymbol{\tau}_z = \tau_{xz}\mathbf{i} + \tau_{yz}\mathbf{j}$. Интенсивность напряжений T и интенсивность деформаций Γ равны:

$$T^2 = \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2, \quad \Gamma^2 = \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2. \quad (3.14)$$

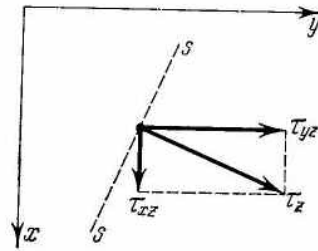


Рис. 3.11: Распределение касательных напряжений в поперечном сечении стержня

Главные напряжения в данном случае вычисляются по формулам:

$$\sigma_1 = T, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -T,$$

что соответствует состоянию чистого сдвига.

Направляющие косинусы главных направлений следующие:

$$\cos(i, z) = \text{const} \quad \text{для } i = 1, 2, 3,$$

а остальные направляющие косинусы пропорциональны одному из отношений $\tau_{xz}/T, \tau_{yz}/T$.

Максимальное касательное напряжение равно

$$\tau_{\max} = |\boldsymbol{\tau}_z| = T. \quad (3.15)$$

Максимальные касательные напряжения действуют по плоскостям $z = \text{const}$ и по цилиндрическим поверхностям с образующими, параллельными оси Z и с направляющей кривой, перпендикулярной в каждой точке к вектору $\boldsymbol{\tau}_z$. Следы этих цилиндрических поверхностей на плоскости $z = \text{const}$ называются *линиями скольжения*.

3.6.2 Основные уравнения.

Касательные компоненты тензора напряжений должны удовлетворять уравнению равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (3.16)$$

Из (3.12) следует

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = -2\omega. \quad (3.17)$$

Ведем функцию напряжений

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x}. \quad (3.18)$$

$$\tau_{xz} dy - \tau_{yz} dx = dF$$

dF есть поток касательного напряжения $\boldsymbol{\tau}_z$ через элемент дуги ds . Линии уровня поверхности напряжений $z = F(x, y)$ называются *линиями напряжений*. Вдоль линии напряжений $F = \text{const}$ или $dF = 0$. Следовательно, $\frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \frac{dy}{dx}$. То есть вектор $\boldsymbol{\tau}_z$ направлен по касательной к линии напряжений.

Боковая поверхность стержня свободна от напряжений. Поэтому вдоль контура C :

$$\tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) = 0.$$

Так как $dy = ds \cos(n, x)$, $dx = -ds \cos(n, y)$, то вектор $\boldsymbol{\tau}_z$ направлен по касательной к контуру. Вследствие (3.18) получаем

$$\frac{\partial f}{\partial s} = 0,$$

т. е. на контуре $F = \text{const}$. Таким образом, контур является одной из линий напряжения. Для односвязного контура можно положить

$$F = 0.$$

Крутящий момент M уравнивается моментом напряжений:

$$M = \iint (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) dx dy,$$

где интегрирование ведется по всей площади поперечного сечения.

Используя (3.18), получим

$$M = \oint_C F[x \cos(n, x) + y \cos(n, y)] ds + 2 \iint F dx dy.$$

Для односвязного контура эта формула имеет вид

$$M = 2 \iint F dx dy, \quad (3.19)$$

т. е. крутящий момент численно равен удвоенному объему, заключенному под поверхностью $z = F(x, y)$.

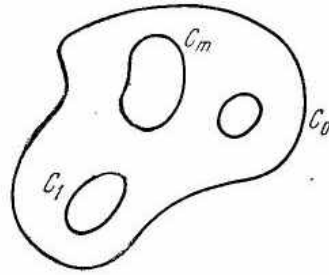


Рис. 3.12: Многосвязный контур поперечного сечения стержня.

Для многосвязного контура формула имеет вид [4]:

$$M = 2 \sum_{i=1}^m F_i \Omega_i + 2 \iint F dx dy, \quad (3.20)$$

где Ω_i — площадь, ограниченная контуром C_i .

3.6.3 Упругое кручение стержня.

При упругом кручении стержня по закону Гука имеем:

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \frac{\partial F_e}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = -\frac{1}{G} \frac{\partial F_e}{\partial x}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение неразрывности, получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 F_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_e}{\partial y^2} = -2G\omega. \quad (3.21)$$

Граничные условия для функции F_e не содержат величину ω . Следовательно, функция напряжений пропорциональна ω . Таким образом отношения τ_{xz}/T и τ_{yz}/T не зависят от ω и при упругом кручении главные направления фиксированы в каждой точке. Из (3.12) и закона Гука следует, что при упругом кручении деформация сечения пропорциональна углу кручения ω .

Мембранная аналогия

Если в пластине вырезать отверстие, имеющее очертания поперечного сечения стержня, затянуть отверстие пленкой с натяжением N и нагрузить пленку равномерным давлением q , то малые прогибы пленки $v(x_1, x_2)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{-q}{N}.$$

и граничному условию $v = 0$ на контуре отверстия. Следовательно, функция напряжений F_e удовлетворяет тем же уравнениям, что и прогиб v . Эта аналогия, установленная Прандтлем, позволяет находить экспериментальное решение задачи о кручении стержня при помощи мыльной или иной пленки в тех случаях, когда получить решение уравнение Пуассона для данного контура затруднительно.

3.6.4 Пластическое кручение стержня.

Пусть все сечение стержня находится в состоянии текучести. Так как $\tau_{\max} = T$, то условия текучести Мизеса и Сен-Венана имеют один и тот же вид:

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2 \quad (3.22)$$

где $k = \sigma_s/\sqrt{3}$ по условию Мизеса и $k = \sigma_s/2$ по условию Треска — Сен-Венана.

Подставляя формулы (3.18) в условие текучести, получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 F_p}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 F_p}{\partial^2 y^2} = k^2. \quad (3.23)$$

На контуре для функции F_p имеем условие:

$$F_p = \text{const.}$$

Таким образом, поверхность пластических напряжений

$$z = F_p(x, y)$$

есть поверхность с постоянным углом ската, построенная на контуре поперечного сечения. Направляющие косинусы нормали к поверхности $z = \frac{1}{k}F_p(x, y)$ равны

$$\cos(n, x) = -\frac{1}{\sqrt{2}k} \frac{\partial F_p}{\partial x}, \quad \cos(n, y) = -\frac{1}{\sqrt{2}k} \frac{\partial F_p}{\partial y}, \quad \cos(n, z) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Рис. 3.13: Эквидистантные кривые и поверхность постоянного ската для прямоугольного поперечного сечения.

Линии $f_p = \text{const}$ являются эквидистантными кривыми, параллельными контуру поперечного сечения. Линии скольжения совпадают с нормальными к контуру.

Вектор касательного напряжения в пластической области постоянен по величине и направлен перпендикулярно к нормали к контуру области. Следовательно, напряжения определены простейшим образом формой контура.

Например, при кручении стержня прямоугольного сечения в правой треугольной области $\tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = k$, а в верхней трапециевидной области $\tau_{xz} = -k, \tau_{yz} = 0$.

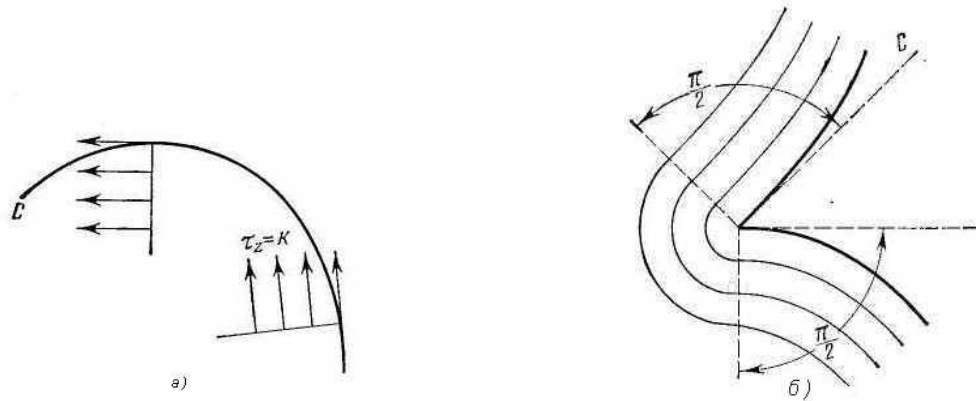


Рис. 3.14: Линии скольжения: а) гладкий контур, б) контур с угловой точкой.

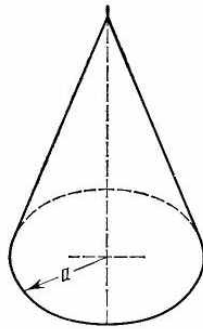


Рис. 3.15: Поверхность постоянного ската для кругового поперечного сечения.

Предельный момент

Предельному состоянию соответствует предельный скручивающий момент:

$$M_* = 2 \iint F_p dx dy, \quad (3.24)$$

равный удвоенному объему под "крышей" построенной на данном контуре.

Для простых контуров значение предельного момента легко вычислить [4].

Для прямоугольника:

$$M_* = \frac{1}{6} k (3a - b) b^2$$

Для круга радиуса a :

$$M_* = \frac{2}{3} k \pi a^3.$$

Литература

- [1] **Новожилов В. В.** Теория упругости. — Л.: Судпромгиз, 1958. — 370 с.
- [2] **Годунов С. К. , Роменский Е. И.** Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. — Новосибирск: Научная книга, 1998. — 280 с.
- [3] **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. — М: Наука, 1988. — 712 с.
- [4] **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. — М: Наука, 1969. — 420 с.
- [5] **Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д.** Математическая теория пластичности. — М: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 704 с.
- [6] **Каменярж Я. А.** Предельный анализ пластических тел и конструкций. — М: Наука. Физматлит, 1997. — 512 с.
- [7] **Мейз Дж.** Теория и задачи механики сплошных сред. — М: Изд-во ЛКИ, 2007 — 320 с.
- [8] **Hertzberg Richard W.** Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials. — Copyright © 1996 by John & Sons — 786 p.